

Logique et Raisonnement

I Élément logique

Proposition : une phrase mathématique qui peut être vraie ou fausse.

Proposition = assertion

Exemple

- ① $\sqrt{2} \leq 0$: prop fausse.
- ② $\pi \in \mathbb{Q}$: prop fausse.
- ③ cos est une fct périodique : vraie.

Théorème : Proposition tjs vraie.

+ Théorème : s'agit des prop vraies.
de plus importante.

+ Proposition : Théorème de moins importance

Théorème du valeur intermédiaire : T.V.I.

$f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue alors l'image
d'un intervalle par une fct continue est
un intervalle

$[a, b]$; $]a, b]$; $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$
 $]-\infty, b]$; $]-\infty, b]$; $]a, b[$, $[a, b[$.

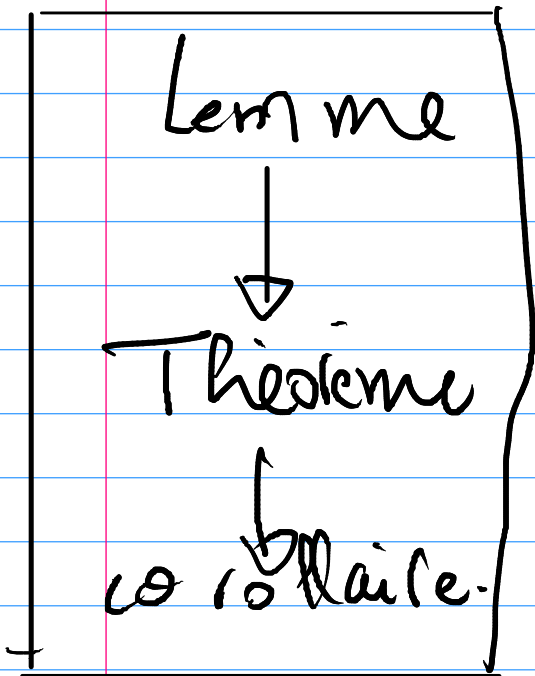
Corollaire: Théorème qui résulte d'un
autre théorème:

si fct continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) \leq 0$
alors $\exists c \in [a, b]$ $f(c) = 0$

si $f(a) < 0 \Rightarrow f(b) \geq 0$ et $0 \in [f(a), f(b)]$

$[f(a), f(b)] \subset f([a, b]) \Rightarrow \exists c \in [a, b]$
 $f(c) = 0$

Lemme: : Théorème qui permet à démontrer
autre théorème de grande importance



② Connecteurs usuels.

① Equivalence.

Def : Soient P et Q deux propositions
On dit que $P \Leftrightarrow Q$ (P est équivalente à Q)
si P et Q ont même valeur de vérité

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemples:

① $\sqrt{2} \geq 0 \Leftrightarrow \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Vraie

② $\frac{-2 \geq 0}{\text{F}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1$ ✓
: Faux

③ $\frac{1}{6} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
Vraie

Lecture $P \Leftrightarrow Q$ se lit:

① P si et seulement si Q .

② P est une condition nécessaire.
et suffisante pour avoir Q .

③ Q est une condition nécessaire et suffisante
pour avoir P .

⑥ Negation

Def: si P est une proposition alors
 $(\text{non } P)$, $\overline{P}$, $\underline{\underline{\neg P}}$ est une proposition
qui est vraie si P est fausse.

P	$\overline{P}$
V	F
F	V

Ex-mples:

① $\text{non}(\sqrt{2} < 0) \Leftrightarrow \sqrt{2} \geq 0$

② $\text{non}(f \text{ est croissante}) \Leftrightarrow$
 $f \text{ n'est pas croissante}$

③ $\text{non}(f \text{ est monotone})$
 $\Leftrightarrow f \text{ n'est pas monotone.}$

④ $\text{non}((u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée})$

$\Leftrightarrow (u_n) \text{ est non majorée}$

⑤ $\text{non}(f \text{ est une fct nulle})$

$\Leftrightarrow f \text{ n'est pas nulle}$

Th.: $\text{non}(\text{non } P) \Leftrightarrow P.$

⑥ Conjonction, disjonction

Def: Soient P et Q deux propositions

① $\underbrace{P \text{ et } Q}_{P \wedge Q} \text{ est vraie si } \left. \begin{array}{l} P \text{ est vraie} \\ Q \text{ est vraie} \end{array} \right\}$

② $\underbrace{P \text{ ou } Q}_{P \vee Q} \text{ est fausse si } \left. \begin{array}{l} P \text{ est fausse} \\ \text{et} \\ Q \text{ est fausse} \end{array} \right\}$

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Th: ① $P \wedge \bar{P} = \text{Faux}$

② $P \vee \bar{P} = \text{Vrai}$

③ $P \wedge Q \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$

④ $\overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$

⑤ $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$
Associative

⑥ $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

⑦ Distributives

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

① Implication

Déf: Soit P et Q deux propositions
 P implique Q ($P \Rightarrow Q$) est fausse.

si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ex-plus

① $\underbrace{\pi > 0}_V \Rightarrow \underbrace{\sqrt{2} > 0}_V : \text{Vraie.}$

② $\underbrace{\sqrt{2} < 0}_F \Rightarrow \underbrace{1 > 0}_V : \text{Vraie.}$

③ $\underbrace{\sqrt{2} > 0}_V \Rightarrow \underbrace{\pi \in \mathbb{Q}}_F : \text{Faux}$

Lecture : $P \Rightarrow Q$

- ① P implique Q
- ② P est une condition suffisante pour avoir Q .

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow x^2 > 0$$

- ③ Q est une condition nécessaire pour avoir P .

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$$

- ④ si P alors Q

- ⑤ P entraîne Q .

- ⑥ Il faut avoir Q pour avoir P .

- ⑦ Il suffit d'avoir P pour avoir Q .

Def $P \Rightarrow Q$

• Réciproque de $P \Rightarrow Q$: $Q \Rightarrow P$

• Contraposée de $P \Rightarrow Q$: $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

Théorème:

$$\textcircled{1} \quad P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{P} \text{ ou } Q.$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow P \text{ et } \bar{Q}$$

$$\textcircled{3} \quad (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \\ \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

$$\textcircled{4} \quad (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \\ \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$$\textcircled{5} \quad P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$$

II Quantifiers

II Quantificateurs

ensemble
↓
Def: ① « Pour tout $x \in E$, on a $P(x)$ »
 $P(x)$: une proposition qui dépend de x

$$\forall x \in E; P(n)$$

② négation de $(\forall x \in E, P(x))$

$\Rightarrow$ il existe au moins un elt x de E tq
non $P(x)$

$$\exists x \in E; \text{non}(P(x))$$

③ $\Leftarrow \exists$ existe un unique x de E tq.
 $P(x) \gg$

$$\exists! x \in E; P(x).$$

Rq: non $(\exists! x \in E, P(x))$

$$A \equiv B \left(\underbrace{\forall x \in E \, P(x)}_{\text{on}} \right) \text{ ou } \left(\exists (x, y) \in E \right. \\ \left. x \neq y \, P(x) \text{ et } \neg P(y) \right)$$

$\forall$: APP ; $\exists$: Exist

Th:

① $(\forall x \in E \quad P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow$

$$(\forall x \in E \quad P(x)) \wedge (\forall x \in E \quad Q(x))$$

② $(\forall x \in E \quad P(x) \vee Q(x)) \Leftarrow$

$$(\forall x \in E \quad P(x)) \text{ ou } (\forall x \in E \quad Q(x))$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ 1 & \text{si } x < 0 \end{cases} ; g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \pi & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$\text{ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$ $\rightarrow$ Vrai.

$$\underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0)}_{\text{Faux}} \text{ ou } \underbrace{(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0)}_{\text{Faux}}$$

$$(3) \exists x \in E \ P(x) \vee Q(x)$$

$$\Leftrightarrow (\exists x \in E \ P(x)) \vee (\exists x \in E \ Q(x))$$

$$(4) \exists x \in E \ P(x) \wedge Q(x)$$

$$\Rightarrow (\exists x \in E \ P(x)) \wedge (\exists x \in E \ Q(x))$$

$$(5) \forall x \in E, \forall y \in F \ P(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in F \forall x \in E \ P(x, y)$$

$$(6) \exists x \in E \exists y \in F \ P(x, y)$$

$$\Leftrightarrow \exists y \in F \exists x \in E \ P(x, y)$$

$$(7) \forall x \in E \exists y \in F \ P(x, y)$$

$$\exists y \in F \forall x \in E \ P(x, y)$$

Exemples:

$$f: E \rightarrow F$$

- ① f est constante $\Leftrightarrow \exists c \in F \forall x \in E f(x) = c$
 $\Leftrightarrow$ soit $x_0 \in E$; $\forall x \in E f(x) = f(x_0)$
 $\Leftrightarrow \forall x \in E f'(x) = 0$
 $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2 f(x) = f(y)$

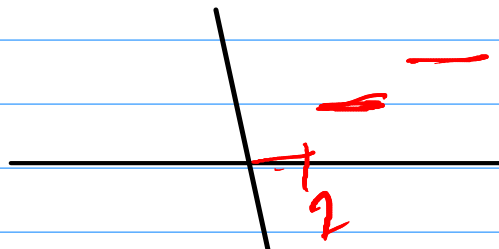
② f s'annule : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} f(x_0) = 0$$

③ f est croissante $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$$\left(\Leftrightarrow \forall x \in E f'(x) \geq 0 \right) \text{ faux.}$$

$$f(x) = x^2$$



(soit f une fct dérivable et croissante
 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} f'(x) \geq 0$)

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

④ f admet un minimum

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

⑤ f est périodique.

$$\Leftrightarrow \exists T \in \mathbb{R}_+^d \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$

III logique de raisonnement

① Démonstration $P \Rightarrow Q$:

② 1^{er} Méthode :

on suppose $\underbrace{P}_{\text{Vraie}}$ et on démontre Q

P est vraie

$\vdots$

Q est vraie

Rédaction : supposons P et Montrons Q .

② Méthode: Contraposé
 $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

on suppose Non Q et on démontre
Non P .

Démonstration de $P \Leftrightarrow Q$

① Démonstration par l'équivalence.

$$P \Leftrightarrow R_1 \Leftrightarrow R_2 \dots \Leftrightarrow Q$$

$$x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} \geq ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

② Méthode : on prouve $P \Rightarrow Q$ puis.
on démontre $Q \Rightarrow P$.

Démonstration $P \wedge Q$ et $P \vee Q$

① $P \wedge Q$: on démontre que P et Q
sont vraies (les deux)

② $P \vee Q$: (a) soit on démontre P est vraie
ou bien Q est vraie

(b) Si on suppose que Q est fausse
on doit trouver que P est vraie.

Exemple : Soit $x \in \mathbb{N}$.

x^2 est paire ou x est impair

supposons que x est paire donc

$$x = 2k \Rightarrow x^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$$

qui est paire.

Démonstrateur : Analyse-synthèse.

On a P à démontrer

Analyse :

On suppose P est vraie $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$

est vraie

synthèse :

$Q \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow P$.

Exercice :

$\forall f$ pour toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 f est somme d'une fct paire et une fct impaire

Analyse

$f = g + h$ avec g et pair et .

on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = g(x) + h(x) \\ f(-x) = g(-x) + h(-x) \\ \quad = g(x) - h(x) \end{array} \right.$ h un paire.

$$c \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Synthèse: soit f une fct $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

On pose $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

et $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

ona $g(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$

et $h(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x)$

D'où g est une fct paire et h impaire

et ona

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) + h(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$= f(x)$$

D'où f est somme d'une fct paire et une fct impaire.

Démonstration " $\exists x \in E \quad f(x)$ "

1^{er} : si l'existence de x est clair ✓

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = x$.

on peut prendre $x=0$.

2^{ème} : si l'existence n'est pas claire :

on applique l'Analyse-Synthèse

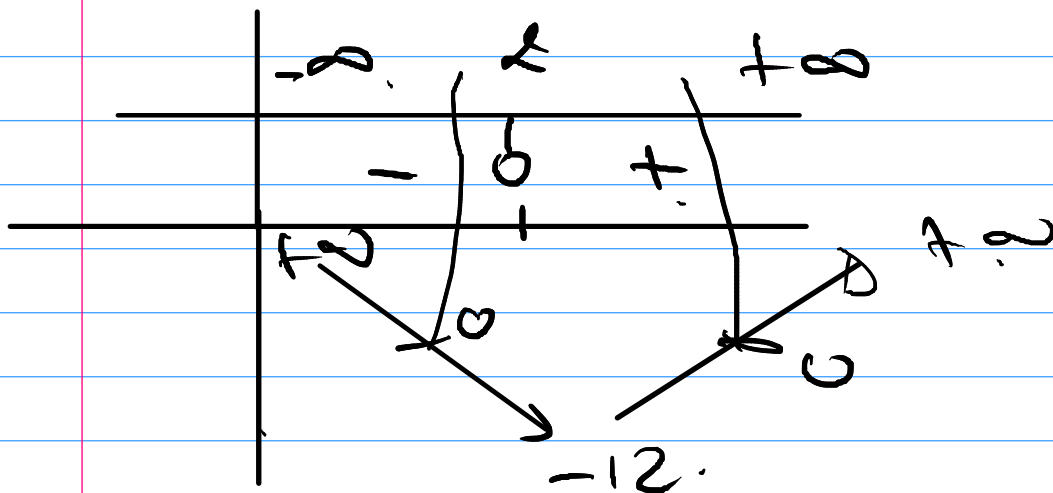
Ex-ple : $f(x) = x^2 - 4x + 2$.

$\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 10$.

$$f(n) = 10 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 10$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

$$g(n) = x^2 - 4x - 8; \quad g'(n) = 2x - 4$$



$$\text{Donc } \exists x \in \mathbb{R} \quad f(n) = 10.$$

Démonstration : Absurde :

Si on veut démontrer une proposition P .
On suppose que P est fausse et on procède
par implication jusqu'à trouver une
contradiction (Absurde)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: si p est premier $\Rightarrow \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$

on suppose $\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, $\exists (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$

tg $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$ avec $a \wedge b = 1$

$$p = \frac{a^2}{b^2} \Leftrightarrow p b^2 = a^2.$$

donc $p \mid a^2$ puisque p est premier.

$p \mid a$ Donc $\exists k \in \mathbb{Z}$ tg $a = pk$.

$$a^2 = p^2 k^2 \Rightarrow p b^2 = p^2 k^2.$$

$$b^2 = p k^2 \Rightarrow p \mid b^2$$

p est premier donc $p \mid b$ où

($p \mid a$ et $p \mid b$ et $a \wedge b = 1$)

ce qui absurde

Contre-exemple:

$[\forall x \in E \ P(x)]$ est fausse on peut
chercher $x \in E \ \overline{P(x)}$

Démonstration par disjonction des cas.

$\forall x \in E \ P(x)$ est vraie

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_k.$$

P est vraie sur E_1 , sur E_2 , ... sur E_k .

Exemple: soit $\lambda < 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\forall \lambda \max(\lambda x, \lambda y) = \lambda \min(x, y)$$

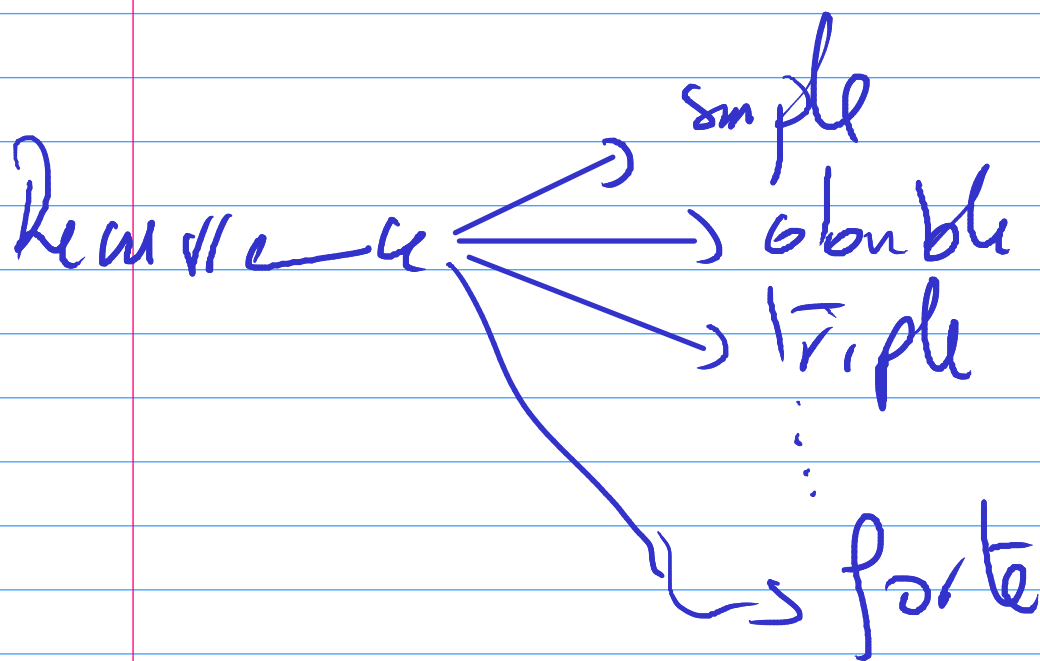
$$\text{Si } x < y \Rightarrow \lambda x \geq \lambda y$$

$$\Rightarrow \max(\lambda x, \lambda y) = \lambda x \\ = \lambda \min(x, y)$$

$$\text{Si } y < x \Rightarrow \lambda y > \lambda x$$

$$\Rightarrow \lambda y = \max(\lambda x, \lambda y)$$

$$\Rightarrow \lambda \min(x, y)$$



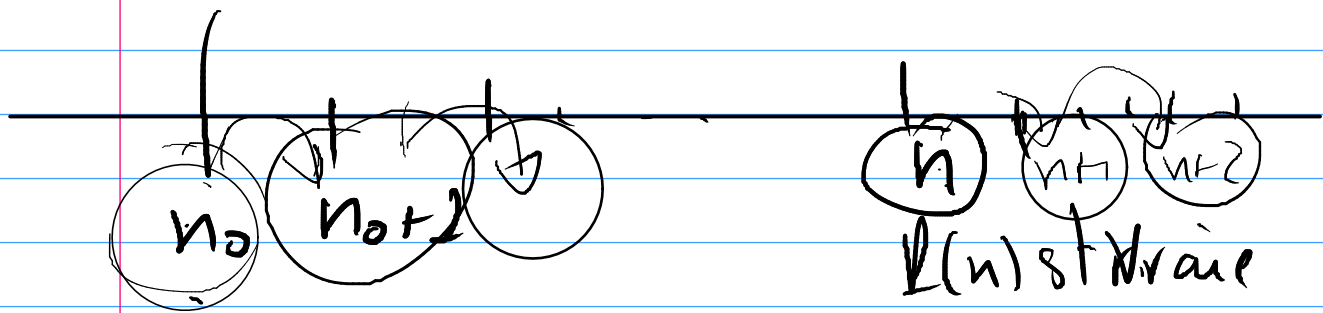
Recurrence utilisable pour démontrer
 $\ll \forall n \in \mathbb{D}, P(n) \gg$

avec $\mathbb{D}$ une partie de $\mathbb{N}$;

$$\mathbb{D} = \{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\}$$

$$= [n_0, +\infty[$$

Réurrence simple:



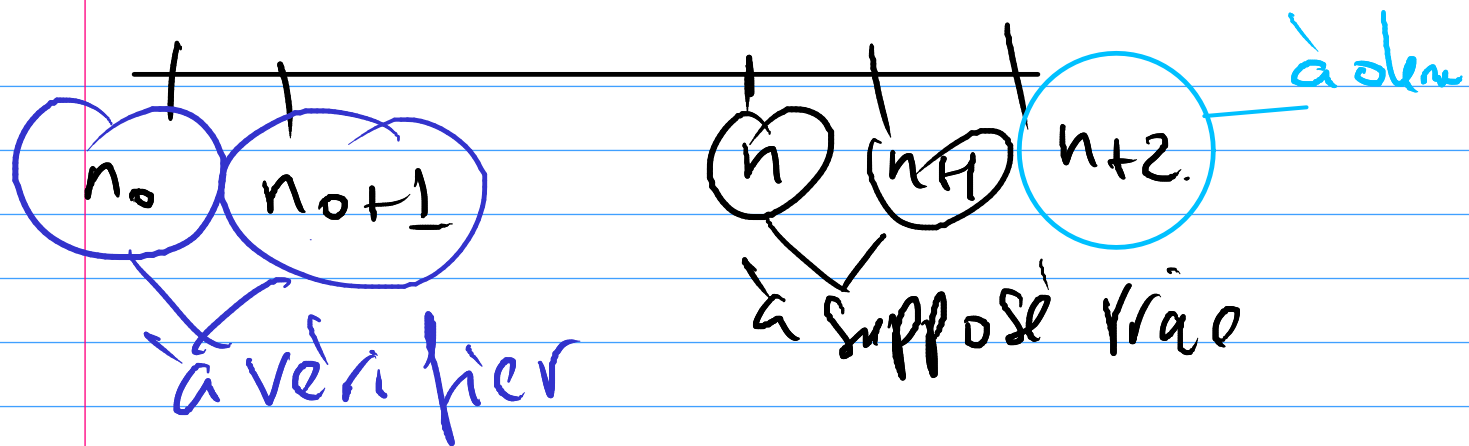
on démontre $P(n_0)$ est vraie.

on suppose qu'elle est vraie pour un certain n et on démontre $P(n+1)$

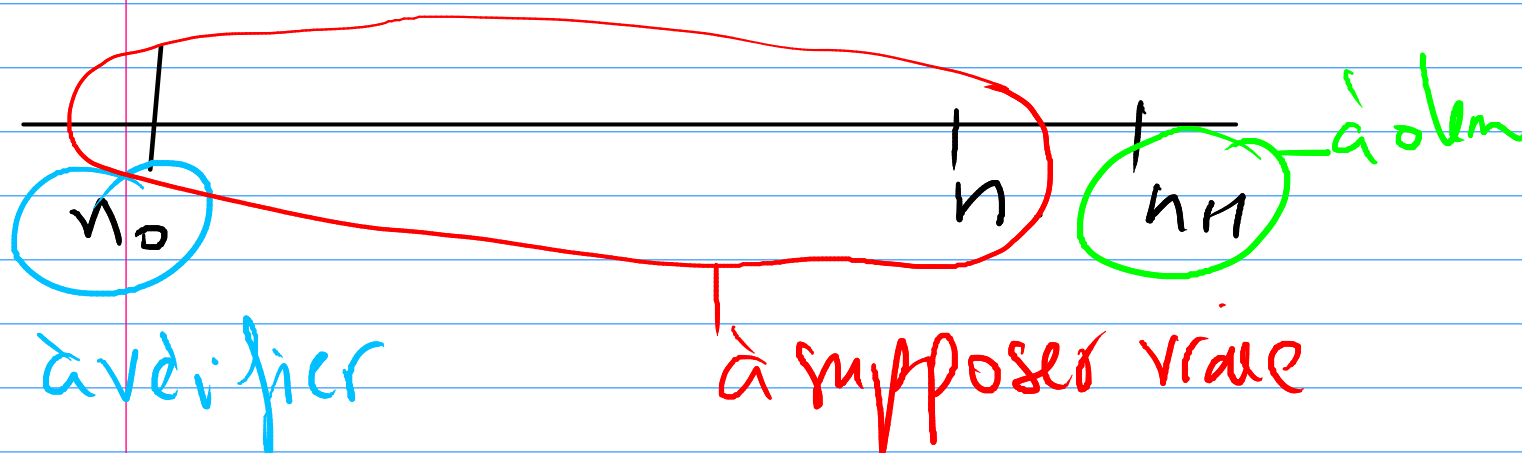
Réurrence double $P(n)$ dépend de $P(n-1)$ et $P(n-2)$

on vérifie $P(n_0)$ et $P(n_0+1)$

et on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies et on démontre $P(n+2)$



Réunion forte



on vérifie $P(n_0)$ et vraie

et on suppose $\forall k \in [n_0, n] P(k)$ et vraie
 et on démontre $P(n+1)$