Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Chapitre 1
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre pour les deux cas suivants

1. la fonction f_n est définie par $f_n(x) = x^n e^x$.
2. la fonction f_n est définie par $f_n(x) = e^{nx}$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X]$ l'application définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'$$

1. Montrer que f est linéaire
2. Déterminer une base de $Ker(f)$ et $Im(f)$.
3. Montrer que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3 : Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère les trois sous-espaces vectoriels

$$F = \{f \in E | f(0) = f'(0) = 0\}; \quad G = \{g \in E | g \text{ est lineaire}\}; \quad H = \{h \in E | h \text{ est constante}\}$$

Montrer que $E = F \oplus G \oplus H$

Exercice 4 : Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 : On considère l'application $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad u(P) = P + P'(X + 1)$$

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$
2. Déterminer la matrice M de u dans la base $(1, X, X^2, X^3)$
3. Montrer que M est inversible. que peut-on déduire pour u ?
4. Calculer $Ker(M - I_4)$. En déduire $Ker(u - Id)$
5. Calculer $Im(M - I_4)$. En déduire $Im(u - Id)$.

Exercice 6 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

On définit également

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\} \quad \text{et} \quad D = vect\,((1, 0, 1))$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$
2. Montrer que H et D sont stable par u.
3. Ecrire la matrice de u dans une base adaptée à la somme directe ci-dessus.

Exercice 7 : Soit $\mathcal{H} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) | \text{tr}(A) = 0\}$. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. préciser sa dimension, et en donner une base.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Exercice 8 : Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une base $\mathcal{B}$ de E et un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. Montrer qu'il existe $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = X^tY$.
2. En déduire que $u^2 = Tr(u).u$

Exercice 9 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

1. Démontrer que $E = Ker(p) \oplus Im(p)$
2. Ecrire la matrice de p dans une base adaptée à $E = Ker(p) \oplus Im(p)$
3. En déduire que $tr(p) = rg(p)$.

Exercice 10 : Soiit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel, et p, q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = 0$. On pose $r = p+q-q\circ p$

1. Montrer que r est un projecteur .
2. Montrer que $ker(r) = Ker(p) \cap Ker(q)$
3. Montrer que $Im(r) = Im(p) \oplus Im(q)$.

Exercice 11 : Soient $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = -y = z\}$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E \oplus F$
2. Soit p la projection sur E parallèlement à F. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit s la symétrie par rapport à E parralèment à F. Déterminer la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension $n \geq 1$. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 1$ tel que $f^k = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer que f n'est pas bijective
2. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$ et $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1} \neq 0$.
   (a) Montrer que $(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
   (b) En déduire que $p \leq n$

Exercice 13 : Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension $2n (n \in \mathbb{N}^*)$. On considère f un endomorphisme de E tel que $f \circ f = 0$.
On suppose, de plus, qu'il existe des vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ tels que la famille $(f(u_1), \cdots, f(u_n))$ est libre.

1. Montrer que $rg(f) \geq n$
2. Montrer que la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est libre.
3. Montrer que $Ker(f) = Im(f)$
4. Montrer que $E = \ker(f) \oplus Vect(u_1, \cdots, u_n)$.

Exercice 14 : On note respectivement $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques et des matrices anti-symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
3. Décomposer la matrice ci-dessous selon cette somme directe

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515