Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

# Exercices en topologie

## ① Normes :

$E = \mathbb{R}[X]$.

$\forall P \in E : \quad N(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$

Montrons que $N$ est une norme :

1. $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$
2. $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$
3. $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$

① Soit $P \in E = \mathbb{R}[X]$ tq

$N(P) = 0 \quad \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = 0$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $\forall t \in [-1,1]$ $P(t) = 0$

$\left(0 \leqslant |P(t)| \leqslant \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = 0\right)$

donc $P$ admet une infinité de racine.
(racines de $P$ contient $[-1,1]$)

donc $\underline{\underline{P = 0}}$

D'où $N(P) = 0 \Rightarrow P = 0$

(2) Soit $P \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$N(\lambda P) = \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda P(t)|$$

$$= \sup_{t \in [-1,1]} |\lambda| \cdot |P(t)|$$

$$= |\lambda| \cdot \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| = |\lambda| N(P)$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

(3) Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X] = E$.

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)|$$

$$\sup_{t \in [-1,1]} |(Q+P)(t)| \leq \sup_{t \in [-1,1]} \left( |P(t)| + |Q(t)| \right)$$

$$\leq \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)| + \sup_{t \in [-1,1]} |Q(t)|$$

$$\leq N(P) + N(Q).$$

D'où l'inégalité triangulaire.

On peut déduire que N est une norme

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ :

$$\|A\|_\infty = \sup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \le i \le n} \left( \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}| \right)$$

Exo n°2 : $E = C^2([0,1], \mathbb{R})$

$\forall f \in E$ :

$$\begin{cases} N(f) = \int_0^1 |f(t)|\,dt \\ N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \\ N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt \end{cases}$$

① Mq $N$, $N'$ et $N''$ sont des normes sur $E$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Ier ny N'stème norme sur E

① $N'(f)=0$ ny $f=0$

ona $N'(f)=0 \Rightarrow \underbrace{|f(0)|}_{\geq 0} + \int_0^1 |f'(t)|dt = 0$ ($\int_0^1 |f'(t)|dt \geq 0$)

ona $|f(0)| \geqslant 0$ et $\int_0^1 |f'(t)|dt \geqslant 0$

donc $|f(0)|=0$ et $\int_0^1 |f'(t)|dt = 0$

$\Rightarrow f(0)=0$ et $\int_0^1 \underbrace{|f'(t)|}_{\geq 0} dt = 0$

$\forall t \in [0,1]$ $|f'(t)|=0$

$\Rightarrow f(0)=0$ et $\forall t \in [0,1]$ $f'(t)=0$

$\Rightarrow f(0)=0$ et $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in [0,1]$

$f(t)=c$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Par continuité de $f$, $c=0$.

D'où $\forall t \in [0,1]$ $\quad f(t)=0$. (1)

2-) $N'(\lambda f) = |\lambda f(0)| + \int_0^1 |\lambda f'(t)|\,dt$

$= |\lambda| \cdot |f(0)| + |\lambda| \int_0^1 |f'(t)|\,dt$

$= |\lambda| \cdot \left( |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt \right)$

$= |\lambda|\, N'(f)$ (2)

(3) Soit $f, g \in E = C^1([0,1], \mathbb{R})$.

On a $N'(f+g) = |(f+g)(0)| + \int_0^1 |(f+g)'(t)|\,dt$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\leq |f(0)| + |g(0)| + \int_0^1 |f'| + |g'|$$

$$\leq |f(0)| + \int_0^1 |f'| + |g(0)| + \int_0^1 |g'|$$

$$\leq N'(f) + N'(g). \quad (3)$$

D'où D'après (1), (2) et (3)

N' est une norme sur E.

(2) Comparer les normes N, N' et N''

N et N' sont équivalentes

$\exists \alpha, \beta > 0$ tq $\forall x \in E$. $\alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

si $N$ et $N'$ sont eq.
$N'$ et $N''$ sont eq $\Rightarrow$ $N$ et $N''$ sont equ

$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow x^n$$

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ st une suite de $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$

$$N(f_n) = \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 x^n\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{n+1}\,x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

$$N'(f_n) = |f_n(0)| + \int_0^1 |f_n'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^1 n\,t^{n-1}\,dt = \left[t^n\right]_0^1 = 1$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$N''(f_n) = |f_n(0)| + |f_n'(0)| + \int_0^1 |f''(t)|\,dt$$

$$= \int_0^1 n(n-1)\,t^{n-2}\,dt.$$

$$= \left[n t^{n-1}\right]_0^1 = n.$$

$N(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $N'(f_n) = 1$ et $N''(f_n) = n$

Ça prouve que $N$, $N'$ et $N''$ ne sont pas equivalentes.

$N(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \iff f_n \xrightarrow{N} 0$.

$N'(f_n) = 1$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Si $N$ et $N'$ sont equivalte

$N'(f_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

(si $f_n \xrightarrow{N_1} f$ et $N_1$ et $N_2$ sont equivalte

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{N_2} f$ |

on $\dfrac{N''(f_n)}{N'(f_n)} \longrightarrow \infty$

$\Rightarrow N''$ et $N'$ ne sont pas eq

$\dfrac{N''(f_n)}{N(f_n)} \longrightarrow \infty$ $\Rightarrow$ $N''$ et $N$ ne sont pas equivat

$N_1$ et $N_2$ sont equivalte $\Leftrightarrow 0 < \dfrac{N_1}{N_2} < \beta$ bornée.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Ex N°6.

① $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{(\overset{\circ}{A})} = \overset{\circ}{A}$.

Soit $B = \overline{A}$ qui est un fermé donc.

donc $\overline{B} = B$. $\Rightarrow \overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

. $C = \overset{\circ}{A}$ qui est un ouvert, donc

$\overset{\circ}{C} = C$. $\Rightarrow \overset{\circ}{C} = \overset{\circ}{(\overset{\circ}{A})} = C = \overset{\circ}{A}$

② $\overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$

$B, C \in E \rightarrow B \subset C \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{C}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{C}$

On a

$\overset{\circ}{A} \subset A \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{A}} \subset \overline{A}$

$A \subset \overline{A} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

1) $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$ dans $\mathbb{R}$.

$A = ]1,2[ \cup \{3\}$.

$\mathring{A} = ]1,2[ \Rightarrow \overline{\mathring{A}} = [1,2]$

$\overline{A} = [1,2] \cup \{3\}$.

$\overline{\mathring{A}} \neq \overline{A}$ ✓

$\mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$

$A = [1,2[ \cup ]2,3]$

$\mathring{A} = ]1,2[ \cup ]2,3[$.

$\overline{A} = [1,2] \cup [2,3] = [1,3]$

$\mathring{\overline{A}} = ]1,3[ \neq \mathring{A}$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

3 @ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et b $\overline{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

@ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

on a $\begin{cases} A \subset A \cup B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{A \cup B} \\ B \subset A \cup B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A \cup B} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

on a soit $x \in \overline{A \cup B}$, donc $\exists (x_n) \in A \cup B$

tq $x_n \longrightarrow x$ ;

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \cup B \Rightarrow \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ st : ↗

tq $(x_{\varphi(n)}) \in A$ ou $x_{\varphi(n)} \in B$.

si $x_{\varphi(n)} \in A$ alors $x \in \overline{A}$

$\Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

2ème Méthode $A \subset \overline{A} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$B \subset \overline{B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

$\Rightarrow \overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$

or $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des fermée

donc $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé

$\Rightarrow \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$

D'où $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

D'où $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(b) $\overline{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

. $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$.

$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$

$\overline{\mathring{A} \cap \mathring{B}} = \overline{\mathring{A} \cap \mathring{B}} \subset \overline{A \cap B}$

Or $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouverts.

$\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert.

$\Rightarrow \overline{\mathring{A} \cap \mathring{B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Donc $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overline{A \cap B}$

$\subseteq$ $A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \mathring{A}$.

$A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \mathring{B}$.

$\Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$

D'où $\overline{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

4) a) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et

b) $\overline{A \cup B} \supset \mathring{A} \cup \mathring{B}$

a) $\begin{cases} A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \\ A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{B} \end{cases}$

$\Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ ✓

b) $\mathring{A} \subset A \subset A \cup B$

$\mathring{B} \subset B \subset A \cup B$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset A \cup B$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = \overline{\overline{\mathring{A} \cup \mathring{B}}} \subset \overline{\overline{A \cup B}}$

$\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ sont des ouvert $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ est un ouvert $\overline{\overline{\mathring{A} \cup \mathring{B}}} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

(a) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$ dans $\mathbb{R}$.

$A = [0,2[$ $B = ]2,3[$.

$A \cap B = \emptyset$ $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

$\overline{A} = ]-\infty,0[ \cup [2,+\infty[$ $\overline{B} = ]-\infty,2[ \cup [3,+\infty[$

$\overline{A} \cap \overline{B} = ]-\infty,0[ \cup \{2\} \cup [3,+\infty[ \neq A \cap B$

(b) $\overline{\mathring{A} \cup \mathring{B}} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$

$A = ]1,2]$ $B = [2,3[$.

$A \cup B = ]1,3[ \Rightarrow \overline{A \cup B} = [1,3]$

$\mathring{A} = ]1,2[$ et $\mathring{B} = ]2,3[$

$\mathring{A} \cup \mathring{B} = ]1,2[ \cup ]2,3[ \neq ]1,3[$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\overline{\overset{\circ}{A \setminus B}} = \overset{\circ}{A} \setminus \overline{B}$ :

$\overline{\overset{\circ}{A \setminus B}} = \overline{A \cap C_E(B)} = \overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overline{C_E(B)}$

$\overline{C_E(\overset{\circ}{B})} = C_E(\overline{B})$

$\overline{\overset{\circ}{A \setminus B}} = \overset{\circ}{\overline{A}} \cap C_E(\overline{B}) = \overset{\circ}{\overline{A}} \setminus \overline{B}$

Th de Baire : Ex N°26

E un K_ev et F un sev de E tq

$\dim F < +\infty$ ; $\dim F = \rho < +\infty$.

(1) $\forall a \in E \ \exists x \in F$ tq

$d(a, F) = d(a, x)$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$F \longrightarrow \mathbb{R}$.

$d_a$ : $x \longrightarrow d(a,x)$ Continue

$$d(a,F) = \inf_{b \in F} d(a,b)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b \in F$ tq $d(a,b) \leq d(a,F) + \varepsilon$ (inf de $d_a(F)$)

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists b_n \in F$ tq $d(a,b_n) \leq d(a,F) + \frac{1}{n}$

$\varepsilon = \frac{1}{n}$.

ona $d(a,b_n) = \|b_n - a\|$.

$\|\|b_n\| - \|a\|\| \leq \|b_n - a\| = d(a,b_n)$

$\|b_n\| \leq \|a\| + \|b_n - a\|$

$\leq \|a\| + d(a,b_n) < 1$.

$\leq \|a\| + d(a,F) + \frac{1}{n}$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\leq \|u_n\| + d(a,F) + \frac{1}{n}$.

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

F est un sev de dim finie

F : compact : F est fermé ✓ (compact : Faux ✗)

> Un sev de dimension finie n'est pas un compact :
> Ex : $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ n'est pas un compact : on prend $u_n = n$.

$(b_n)$ est bornée donc on a un fermé que F

d'après B.W $(b_n)$ admet une

Sous suite convergente $(b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$

$b_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} b$

$d(b_{\varphi(n)}, a) = \|b_{\varphi(n)} - a\| \leq d(a,F) + \frac{1}{\varphi(n)}$.

on tend $n \to +\infty$.

$\|b - a\| \leq d(a,F)$ (**)

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

or $b \in F$ donc $d(a,b) \geq d(a,F)$.

$d(a,F) \leq d(a,b) \leq d(a,F)$

d'où $\exists b \in F$ tq $d(a,b) = d(a,F)$

(2) $\exists a \in E$ $(F \neq E)$ tq.

$d(a,F) = 1$ et $\|a\| = 1$.

(1) $\forall a \in E$, et $\forall y \in F$.

$d(a,F) = d(a-y,F)$

$d(a,F) = \inf_{x \in F} d(a,x) = \inf_{x \in F} d(a, x+y)$

$\varphi : \begin{matrix} F \longrightarrow F \\ x \longrightarrow x+y \end{matrix}$ bijective : Translation

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$d(a,F) = \inf_{x\in F} d(a, x+y) = \inf_{x\in F} \|a-(x+y)\|$$

$$= \inf_{x\in F} \|\overrightarrow{a-y} - x\|$$

$$= \inf_{x\in F} d(\overrightarrow{a-y}, x)$$

$$= d(a-y, F) \quad (1)$$

$$d(\lambda a, F) = |\lambda|\, d(a,F) \quad \lambda \neq 0$$

$$d(\lambda a, F) = \inf_{x\in F} \|\lambda a - x\|$$

$$= |\lambda| \inf_{x\in F} \|a - \frac{1}{\lambda} x\| \qquad \frac{1}{\lambda} x \in F$$

$h : F \to F$, $x \to \frac{1}{\lambda} x$ : homothétie $\Rightarrow$ bijective

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$d(\lambda a, F) = |\lambda| \, d(a, F)$ (2)

$a \in E$ ; $\|a\| = 1$ et $d(a, F) = 1$.

Soit $a \in E$. $\exists a_0 \in F$ tq $a \in E \setminus F$

$d(a, F) = d(a, a_0)$ d'après (1)

$\lambda > 0$.

$\frac{1}{d(a, a_0)} \cdot d(a, F) = 1$

$d\left(\frac{1}{d(a, a_0)} a, F\right) = 1$.

$d(a, a_0) = \|a - a_0\|$

$y = \frac{1}{d(a, a_0)} a_0 \in F$

$d\left(\frac{1}{d(a, a_0)} a - \frac{1}{d(a, a_0)} a_0, F\right) =$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$d\left(\frac{1}{d(a_1, a_0)}\, a_1, F\right) = 1.$$

On a $b = \dfrac{1}{d(a_1, a_0)}(a - a_0)$

et $\|b\| = \dfrac{\|a - a_0\|}{\|a - a_0\|} = 1.$

D'où $\exists\, b \in E$ tq $\|b\| = 1$

et $d(b, F) = 1$.

(3) $\dim E = +\infty$.

Ng $\exists\, (a_n) \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\|a_n\| = 1$

$$d(a_{n+1}, \mathrm{Vect}(a_0, \ldots, a_n)) = 1.$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Soit $F_0 = \text{Vect}(a_0)$ dim $F_0 = 1$

d'après la qtée - (2) $\exists a_1 \in E$ tq.

$\|a_1\| = 1$ et $a \perp (a_1, F_0) = 1$.

$F_1 = \text{Vect}(a_0)$.

$F_1 = \text{Vect}(a_0, a_1)$ de dim $F_1 = 2$.

d'après qt (2) $\exists a_2 \in E$ tq $\|a_2\| = 1$

et $a \perp (a_2, F_1) = 1$.

et on construit une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ par recurrence.

tq $F_n = \text{Vect}(a_0, \ldots, a_n)$.

dim $F_n = n+1$.

$\exists a_{n+1} \in E$ tq $\|a_{n+1}\| = 1$ et $a \perp (a_{n+1}, F_n) = 1$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Puisque $\dim E = +\infty$ alors $F_n \neq E$

donc $\exists a_{n+1} \notin F_n$ tq $\|a_{n+1}\| = 1$

$d(a_{n+1}, F_n) = 1$.

(h) $B_f(0,1)$ : fermé borné n'est pas compact.

• Construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B_f(0,1)$ tq $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence.

Soit $a_0 \in B_f(0,1)$, on construit d'après la question précédente $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tq $\|a_n\| = 1$ et $d(a_n, \text{Vect}(a_0, \dots, a_{n-1})) = 1$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \in B_f(0,1)$.

Supposons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $a \in E$

il existe une sous-suite $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tq.

$a_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\|a_{\varphi(n)} - a\| < \varepsilon$.

on a $\|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\|$

$\leq \|a_{\varphi(n+1)} - a\| + \|a_{\varphi(n)} - a\|$

$\leq 2\varepsilon$

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a $(a_{\varphi(n+1)}, \text{Vect}(a_0, \dots, a_{\varphi(n)-2}))$

$= 1$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\varphi(n) < \varphi(n+1) \Rightarrow \varphi(n) \leq \varphi(n+1) - 1$

or $a_{\varphi(n)} \in \text{Vect}(a_0, \dots, a_{\varphi(n+1)-1})$

$d(a_{\varphi(n+1)}, a_{\varphi(n)}) \geq 1$

or $d(a_{\varphi(n+1)}, a_{\varphi(n)}) \leq 2\varepsilon$.

Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$ $\|a_{\varphi(n)} - a\| < \frac{1}{4}$

$1 \leq \|a_{\varphi(n+1)} - a_{\varphi(n)}\| < \frac{1}{2}$.

Ce qui est absurde.

D'où $(a_n)$ n'admet pas de valeur d'adhérence.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $B_f(0,1)$ n'est compact.

Ex n°23) $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermé bornée d'un ev E tq $\dim E < +\infty$

donc $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de compacts

$F_n \searrow$ $F_{n+1} \subset F_n$.

$\delta(F_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad \delta(F_n) = \sup_{(x,y)\in F_n} \|x-y\|$

$F_n = [1,3] \cup [4,5]$

$\delta(F_n) = 5-1 = 4$.

Ng $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{a\}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

· $F_n$ st une suite de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ : such E.

ona $\forall n\in\mathbb{N}$ $F_n$ st un fermé.

donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ st un fermé

ona $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \subset F_k$ $k\in\mathbb{N}$.

ona $F_k$ st bornée $\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ st bornée.

($F_k$ est bornée $\Leftrightarrow \exists M>0$ $\forall a\in F_k$ $\|a\| \leq M$.)

$\Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ st un compact

si $a,b\in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$

$a\in F_n$ et $b\in F_n$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$0 \leq \|u-b\| = d(a,b) \leq \delta(F_n) = \sup \|x-y\|$
$(x,y) \in F_n$.

$\longrightarrow 0$.
$n \to +\infty$.

donc $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$.

donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{a\}$ ou $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$

puisque $F_n \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in F_n \neq \emptyset$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ tq $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in F_n$

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_0^{\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \geq 1} \in F_1^{\mathbb{N}^*}$

$F_{n+1} \subset F_n$ ; $x_n \in F_n \subset F_{n-1} \subset F_{n-2} \subset \dots \subset F_0$.

$(x_n)_{n \geq 2} \in F_2$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$F_n$ fermé borné $\Rightarrow$ des compacts

$(x_k)_{k \geq n}$ est une suite de $F_n$

admet une sous-suite convergente

$(x_{\varphi(k)})_{k \geq n}$ est une sous-suite $(x_k)_{k \geq n}$.

qui converge vers $x \in F_n$. (compact)

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $(x_{\varphi(k)})_{k \geq n} \in F_n$.

$x \in F_n$.

$\Rightarrow x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

D'où $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{x\}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Ex n°17

1) a) $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

b) et $\overline{GL_n(\mathbb{R})} = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) : f est continue ssi $f^{-1}$(ouvert) = ouvert

ssi $f^{-1}$(fermé) = fermé

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ ($\dim = n^2$)

$A \longrightarrow \det(A)$.

Donc det est une application continue

1) : det : est une application polynômiale en coef de A.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad : \text{Def polynôme}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$(x_1 \quad x_K) \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i x_1^{d_1^i} \quad x_K^{d_K^i}$$

$$f(x,y,z) = 3xy + 2x^2yz + x^2y^2z^3 + xyz^4 + 2xy^5z$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

(2) det est une application multilinéaire en dimension finie, donc det est continue

$$A \in Gl_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$$

$$Gl_n(\mathbb{K}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

$$= \det^{-1}(\text{ouvert})$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\{0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ donc

$\mathbb{R}\setminus\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

et det est continue donc $\det^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

est un ouvert $\Rightarrow$ $GL_n(\mathbb{R})$

donc $\underline{GL_n(\mathbb{R})}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$

(b)

$GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$.

$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \exists (B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$

tq $B_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$

si $A \in GL_n(\mathbb{R})$ : $B_n = A \longrightarrow A$.

si $A \notin GL_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow rg(A) < n$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$rg(A) = p < n$.

$A = (C_1, C_2, \ldots C_n)$.

$\exists$ p-colonne de A qui forme une famille libre.

p-colonnes libre

$A = (C_1, \ldots, C_p \ C_{p+1} \ldots C_n)$

$A = (C_1\ C_2, C_3, C_4)$

$B = (C_2, C_3, C_1\ C_4)$

équivalentes

$A = \underset{B}{Mat}\ f = \begin{pmatrix} f(e_2) & f(e_3) & f(e_1) & f(e_4) \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{matrix}$ ($e_1 = f(e_2)$, $e_2 = f(e_3)$, $e_3 = f(e_1)$, $e_4 = f(e_4)$)

$= Mat_{(e_2, e_3, e_1, e_4)}^{B_2}(e_1, e_2, e_3, e_4)$ $(B_1)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$A = P^{-1} B Q$.

$A = P (C'_1, C'_2, \ldots C'_p, C'_{p+1} \ldots C'_n) Q$.

$(C'_1, \ldots C'_p)$ est libre

$rgA = rg(\Pi)$.

$M_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} M$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$rg(\Pi) = p$ : $C'_{p+1} \in Vect(C'_2 \ldots C'_p)$

$C'_{p+2} \in Vect(C'_1, \ldots C'_p)$

$\vdots$

$C'_n \in Vect(C'_1 \ldots C'_p)$

on a $(C'_1, \ldots C'_p)$ est libre de $\Pi_{n_1}(\mathbb{R})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On peut compléter la famille

$(C'_1, \dots, C'_p)$ en une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$(C'_1, \dots, C'_p, E_{p+1}, \dots, E_n)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

$D_1 \; D_2 \; \dots \; D_p \; \dots \; D_{p+1} \; \dots \; D_n$

$$M_k = \left(\underbrace{C'_1, \dots, C'_p}, \underbrace{C'_{p+1} + \frac{1}{k} E_{p+1}, \dots, C_n}\right) \in GL_n(\mathbb{R})$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i D_i = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C'_i + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i \left(C'_i + \frac{1}{k} E_i\right) = 0$$

$$\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i E_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i C'_i + \sum_{i=p+1}^{n} \frac{\lambda_i}{k} C'_i = 0$$

$$\lambda_{p+1} C'_{p+1} + \dots + \lambda_n C'_n$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$k \to +\infty$ $M_k \to \Pi$

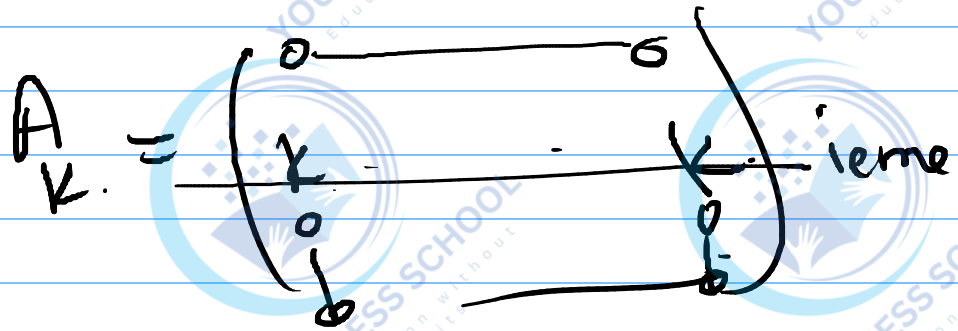
$A_k = P^{-1} M_k Q \xrightarrow[k \to +\infty]{} P^{-1} \Pi Q = A$

② $\Pi_n(\mathbb{K}) \setminus Gl_n(\mathbb{K})$ = fermé

ouvert

$\dim \Pi_n(\mathbb{K}) = n^2 < +\infty$

Donc $\Pi_n(\mathbb{K}) \setminus Gl_n(\mathbb{K})$ n'est pas bornée

$A_k =$  $i^{ème}$

$\|A_k\| = \sup_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = nk \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$

($A_k$) n'est pas bornée $\Rightarrow \Pi_n(\mathbb{K}) \setminus Gl_n(\mathbb{K})$ n'est pas compact

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

(3) $O_n(\mathbb{R})$ est compact car fermé borné.

$M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow P_n(\mathbb{R})$

$\varphi : A \longrightarrow A \cdot {}^tA$ $\quad \sum a_{ik} b_{kj}$

$= (\ldots)$

$\varphi$ est continue : car polynômiale

$f : A \longrightarrow {}^tA$ : linéaire = continue

$\psi : (A, B) \longrightarrow A \times B$ : polyn.

donc continue.

$\varphi(A) = \psi(A, f(A))$ continue

$O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = I_n \}$

$O_n(\mathbb{R}) = \varphi^{-1}(\{I_n\})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On a $\{I_n\}$ est un fermé et $\varphi$ continue

donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

$O_n(\mathbb{R})$ est bornée.

$$\|A\|_2 = \left(\sum_{\substack{i=1,n \\ j=1}}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$. $A = (C_1 \quad \dots \quad C_n)$

forme une base $\|C_i\| = 1$

$\langle C_i, C_j \rangle = \delta_{ij}$.

$$1 = \|C_i\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 = 1.$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\|A\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^2}_{1} = n.$$

$\|A\|_2 = \sqrt{n}$. bornée.

- $\left(M_n(\mathbb{R})\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$A, B \longrightarrow \operatorname{tr}(A^t B).$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\operatorname{tr}(A^t A)}.$$

$$= \sqrt{\sum_{\substack{i=1 \\ j=2}} |a_{ij}|^2}.$$

- $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

Si $O_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs

$\det(O_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs

$\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$

(continue)

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A = \pm 1$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515