Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

où n désigne un entier naturel.

I.A -

I.A.1) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

On a :

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2(x))\cos^n(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\sin(x)\cos^n(x)\,dx$$

$$= I_n + \left[\frac{\sin(x)\cos^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{n+2}(x)}{n+1}\,dx$$

$$= I_n - \frac{1}{n+1} I_{n+2}$$

donc

$$I_{n+2}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = I_n$$

i.e.

$$\boxed{I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$$

I.A.2) En déduire une expression de I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de factorielles.

D'après la question précédente, on a :

$$\cdot\ I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4}$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-6}$$

$$\vdots$$

$$= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdot\ \cdots\ \cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot I_0$$

$$= \frac{2n\times(2n-1)\times(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\cdots 4\times 3\times 2\times 1}{\left(2n\cdot 2n-2\cdot 2n-4\cdot\ \cdots\ \cdot 4\times 2\right)^2}\cdot I_0$$

$$= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

- $I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1}$

$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} I_{2n-3}$

$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-4}{2n-5} \cdot I_{2n-5}$

$\vdots$

$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-4}{2n-5} \cdot \dots \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot I_1$

$= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$

I.B.1) Montrer l'équivalence : $I_n \sim I_{n+1}$.

D'après I.A.1 on a :

$\frac{I_{n+2}}{I_n} = \frac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $\cos(x)^{n+1} \leq \cos(x)^n$ (car $0 \leq \cos(x) \leq 1$)

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^{n+1} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^n dx$

c-à-d $I_{n+1} \leq I_n$

Ainsi (I_n) est décroissante.

Par suite,

$I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$

Donc :

$\frac{I_{n+2}}{I_n} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

or $\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+2}}{I_n} = 1$, donc d'après le th. des gendarmes, on a :

$\lim_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$

D'où, $I_{n+1} \sim I_n$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

I.B.2) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $J_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ est constante et en déduire l'équivalence : $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

• Soit $n\in\mathbb{N}$.

→ si $n = 2p$ $(p\in\mathbb{N})$, alors d'après I.A.2, on a :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

donc :

$$J_n = J_{2p} = (2p+1)I_{2p}I_{2p+1}$$

$$= (2p+1)\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

→ si $n = 2p+1$ $(p\in\mathbb{N})$ alors d'après I.A.2, on a :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad I_{2p+2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

donc :

$$J_n = J_{2p+1} = (2p+2)I_{2p+1}I_{2p+2}$$

$$= (2p+2)\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}\times\frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= (2p+2)\frac{2p+2}{2^2(p+1)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2^2(p+1)^2}{2^2(p+1)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

Donc,

$\forall n\in\mathbb{N}$, $J_n = \frac{\pi}{2}$

c-à-d $(J_n)_n$ est constante.

• D'après I.B.1, on a : $I_{n+1} \sim I_n$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc :

$$J_n = (n+1) I_n I_{n+1} \sim (n+1) I_n^2$$

et comme $n+1 \sim n$, alors :

$$J_n \sim n I_n^2$$

or d'après ce qui précède, on a $J_n \to \frac{\pi}{2}$, donc :

$$n I_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$$

D'où,

$$I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$$

Ainsi,

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

I.B.3) **Application 1**

Montrer, lorsque t, réel, tend vers $+\infty$, l'équivalence :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^t \, dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2t}}.$$

Soit $t > 0$, on pose $n = \lfloor t \rfloor$ (et donc : $n \leq t < n+1$)

Puisque $0 \leq \cos(x) \leq 1$ pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, alors :

$$\cos(x)^{n+1} \leq \cos(x)^t \leq \cos(x)^n$$

Et en intégrant, on trouve :

$$I_{n+1} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^t \, dx \leq I_n$$

donc :

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}} I_{n+1} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^t \, dt \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}} I_n$$

Par ailleurs, $n \leq t < n+1$, donc :

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leq \sqrt{\frac{2t}{\pi}} < \sqrt{\frac{n+2}{\pi}}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Donc :

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^t(x)\, dx \leqslant \sqrt{\frac{2n+2}{\pi}}\, I_n$$

or $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ et $I_{n+1} \sim I_n$, donc :

$$\sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_{n+1} \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n \sim 1$$

$$\sqrt{\frac{2n+2}{\pi}}\, I_n \sim \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\, I_n \sim 1$$

En remarque que $n \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$ (car $n+1 > t$), alors :

d'après le th. des gendarmes, on aura :

$$\sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^t\, dx \xrightarrow[t \to +\infty]{} 1$$

D'où, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^t\, dx \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$

I.B.4) **Application 2**

À l'aide de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x\, dx$, montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} |\sin x|^x\, dx$ est divergente.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_n$. On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|^x\, dx$$

$$= \int_{\pi}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^x\, dx$$

$$\leqslant \int_{1}^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^x\, dx$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Par ailleurs,

$$U_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(x)|^n dx \qquad (\text{on pose } y = x - k\pi)$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin(y+k\pi)|^{y+k\pi} dy$$

$$= \int_0^{\pi} |\sin(y)|^{y+k\pi} dy$$

$$\geq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin(y)|^{y+k\pi} dx$$

$$\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(z+\tfrac{\pi}{2})|^{z+\frac{\pi}{2}+k\pi} dz \qquad (\text{on pose } z = y - \tfrac{\pi}{2})$$

$$\geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(z)|^{z+\frac{\pi}{2}+k\pi} dz = V_k$$

Or d'après I.B.3, on a :

$$V_k \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z+\pi+2k\pi}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2k\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2k}}$$

donc la série $\sum V_k$ diverge (car la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}}$ est divergente) ; alors $\sum_{k=1}^{n} V_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

On en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui entraîne :

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\sin(x)|^n dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

D'où, $\int_1^{+\infty} |\sin(nx)|^x \, dx$ est divergente

I.C - On pose, pour $n \geq 1$, $u_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n - \ln n!$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$.

I.C.1) Montrer l'équivalence : $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$v_n = u_{n+1} - u_n$

$= (n+\tfrac{3}{2}) \ln(n+1) - (n+1) - \ln((n+1)!) - (n+\tfrac{1}{2}) \ln(n) + n + \ln(n!)$

$= (n+\tfrac{3}{2})(\ln(n) + \ln(1+\tfrac{1}{n})) - 1 - \ln(n+1) - (n+\tfrac{1}{2}) \ln(n)$

$= \ln(n) + (n+\tfrac{3}{2}) \ln(1+\tfrac{1}{n}) - 1 - \ln(n+1)$

$= -\ln(1+\tfrac{1}{n}) + (n+\tfrac{3}{2}) \ln(1+\tfrac{1}{n}) - 1$

$= (n+\tfrac{1}{2}) \ln(1+\tfrac{1}{n}) - 1$

$= (n+\tfrac{1}{2}) \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] - 1$

$= 1 - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$= \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

D'où, $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$

I.C.2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On notera S sa limite.

On a $v_n \sim \frac{1}{12n^2}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente donc $\sum v_n$ converge aussi. Par suite, la suite $(S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k)_n$ converge.

or $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_1 = u_n - 1$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $U_n = S_{n-1} + 1$

D'où, $\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} + 1$

$= \lim_{n\to+\infty} S_n + 1$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} v_k + 1$

Ainsi, (U_n) est convergente

I.D - Établir l'existence d'une constante $C > 0$ telle que :

$$n! \sim C n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$

D'après I.c on $(U_n)_n$ converge, donc si on note ℓ sa limite alors puisque la fct $x \to e^x$ est continue, on aura :

$$e^{U_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell} = C' > 0$$

or $e^{U_n} = \exp\left((n+\frac{1}{2})\ln(n) - n - \ln(n!)\right)$

$= \frac{n^{n+1/2}}{e^n \cdot n!}$

$= \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n!}$

donc,

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n!} \sim C'$$

Par suite,

$$n! \sim \frac{1}{C'} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n}$$

D'où,

$$n! \sim C \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \quad \text{où } C = \frac{1}{C'} > 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

I.E - En utilisant la question I.B.2, en déduire l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

D'après I.B.2, on a :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

et puisque $I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$, alors :

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

Par ailleurs, d'après I.D, on a :

$$n! \sim C\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}$$

donc :

$$(2n)! \sim C\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}$$

et

$$(n!)^2 \sim C^2\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot n$$

Alors,

$$\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \sim \frac{C\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}{2^{2n}C^2\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}\cdot n}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\cdot\sqrt{2n}}$$

On en déduit que :

$$C = \sqrt{4\pi}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi}$$

D'où, d'après I.D, on a :

$$n! \sim \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}$$

Partie II

On considère les séries entières :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

II.A - Montrer que la première série entière définit une fonction continue sur $[-1, 1[$ et calculer sa somme f.

Rappel : si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa somme est une fct de classe C^∞ sur $]-R, R[$

- Calculons le rayon de convergence R de la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$

Si on pose $a_n = \frac{1}{n}$, alors :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $R = 1$.

- Par suite, la somme f de $\sum \frac{x^n}{n}$ est définie et de classe C^∞ sur $]-1,1[$. En particulier, f est continue sur $]-1,1[$.
- Etudions f au pt -1 :

Si on considère la série entière $\sum x^n$ et on note g sa somme alors :

$$\forall x \in]-1,1[,\ g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

qui est continue sur $]-1,1[$ et on a

$$\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x)$$

donc $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

D'où, $f(x) = -\ln(1-x)$ pour $x \in]-1,1[$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\ln(2)$$

or $$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 (-t)^{n-1}\,dt$$

$$= -\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{N} (-t)^{n-1} \right) dt$$

$$= -\int_0^1 \frac{1-(-t)^N}{1+t}\,dt \qquad \left(\text{car } -t \neq 1,\ t \in [0,1]\right)$$

$$= -\int_0^1 \frac{dt}{1+t} + \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt$$

$$= -\ln(2) + \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt$$

donc $$\left| \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} + \ln(2) \right| = \left| \int_0^1 \frac{(-t)^N}{1+t}\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 \left| \frac{(-t)^N}{1+t} \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \frac{t^N}{1+t}\,dt$$

$$\leq \int_0^1 t^N\,dt = \frac{1}{N+1}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On en déduit que $\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} + \ln(2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

D'où, $f(-1) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$

Ainsi, $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1)$

Ce qui prouve que f est continue en -1.

En résumé :

f est définie et continue sur $[-1,1[$ et on a :

$$f(x) = -\ln(1-x)$$

II.B - On considère la seconde série entière.

II.B.1) Déterminer son rayon de convergence. On note g sa somme, là où elle converge.

Si on note $b_n = \ln(1+\frac{1}{n})$, alors :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} \cdot n$$

$$= \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} \cdot \frac{n}{n+1}$$

et comme :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n+1})}{\frac{1}{n+1}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}$$

alors : $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1$

D'où, le rayon de convergence de la série $\sum \ln(1+\frac{1}{n}) x^n$ est :

$$R = 1$$

II.B.2) Montrer que cette série entière converge pour $x = -1$ et calculer $g(-1)$.

- La série $\sum \ln(1+\frac{1}{n})(-1)^n$ est alterné vérifiant le critère de Leibniz c-à-d la suite $(\ln(1+\frac{1}{n}))_n$ est décroissante et tend vers 0, donc elle est convergente. D'où, g est définie en -1

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Rappel : . Une série alternée est une série numérique de la forme $\sum a_n(-1)^n$ avec $(a_n)_n$ est une suite de réels positifs

. Critère de Leibniz :
Si $(a_n)_n$ est décroissante et tend vers 0, alors la série $\sum a_n(-1)^n$ est convergente.

. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) - \ln\left(\frac{2n}{2n-1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1\times 3^2\times 5^2 \times \cdots \times (2N-1)^2(2N+1)}{2^2\times 4^2\times 6^2 \times \cdots \times (2N)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1^2\times 2^2\times 3^2\times 4^2\times 5^2\times 6^2\times \cdots \times (2N-1)^2(2N)^2(2N+1)}{(2^2\times 4^2\times 6^2\times \cdots \times (2N)^2)^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{(2N)!^2}{(2^{2N}\cdot N!^2)^2}\cdot(2N+1)\right)$$

or $I_{2N} = \frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}$ (d'après I.A.2), donc :

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \ln\left(I_{2N}^2 \cdot \frac{4}{\pi^2}(2N+1)\right)$$

Et d'après I.B.2, on a : $I_{2N} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4N}}$, donc :

$$I_{2N}^2 \cdot \frac{4}{\pi^2}\cdot(2N+1) \sim \frac{\pi}{4N}\cdot\frac{4}{\pi^2}\cdot 2N = \frac{2}{\pi}$$

On en déduit que $\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

Par conséquent,

$$S(-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

II.C - Déterminer la limite à gauche de g en 1.

Pour $x \in [-1,1[$, on a : $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$

g est croissante sur $[0,1[$ donc, d'après le théorème de la limite monotone, g admet une limite (finie ou infinie) à gauche en 1. Par ailleurs,

$$g(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

or $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ est divergente de somme $+\infty$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$.

Donc, $\lim_{x \to 1^-} g(x) = +\infty$.

Rappel (théorème de la limite monotone)

Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction croissante, alors :

1) ⓐ si f est majorée, alors f admet une limite finie en b^- et on a :
$\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup_{a<x<b} f(x)$

ⓑ sinon, alors :
$\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$.

2) ⓐ si f est minorée, alors f admet une limite finie en a^+ et on a :
$\lim_{x \to a^+} f(x) = \inf_{a<x<b} f(x)$

ⓑ sinon, alors :
$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

II.D.1) Montrer l'existence d'une limite l à gauche en 1 de $g(x) + \ln(1-x)$.

Pour $x \in [0,1[$, on a :

$$g(x) + \ln(1-x) = g(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^n$$

Par ailleurs, $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}$ et puisque la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente alors $\sum \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$ l'est aussi.

D'où $g-f$ admet une limite à gauche en 1, et on a :

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) - f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = l$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

II.D.2) On pose, pour n entier strictement positif,

$$w_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n .$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$w_{n+1} - w_n = \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \ln(n+1)\right] - \left[\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \ln n\right]$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

or $\forall x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$, donc $\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq -\frac{1}{n+1}$

Par suite,

$$w_{n+1} - w_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0$$

Donc $(w_n)_n$ est décroissante.

II.D.3) Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel γ strictement positif.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in [k, k+1]$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$$

donc :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

En sommant, on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) - \ln(k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

donc : $0 < \frac{1}{n} \leq w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \leq 1$

Ainsi $(w_n)_n$ est une suite décroissante et minorée, donc elle converge.

Si on note γ sa limite, alors $\gamma \geq 0$ (car $w_n > 0$)

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On considère la suite : $t_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$. Alors, on a :

→ $t_n \leq w_n$

→ $(t_n)_n$ est croissante. En effet,

$$t_{n+1} - t_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+2)\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+2) + \ln(n+1)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \geq 0 \quad \left(\text{car } \ln(1+x) \leq x \text{ pour } x = \frac{1}{n+1}\right)$$

→ $t_n - w_n = -\ln(n+1) - \ln(n+1)$

$$= -\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $(w_n)_n$ et $(t_n)_n$ sont adjacentes.

Par suite, elles convergent vers la même limite γ et on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad t_n \leq \gamma \leq w_n$

en particulier : $\quad \frac{3}{2} - \ln(2) \leq \gamma \leq w_1 = 2 - \ln(2)$

c.-à-d $\quad 0 < 0{,}44 \leq \gamma \leq 0{,}69$

D'où, $\gamma > 0$

II.E - Établir que $l = -\gamma$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{N} \ln(1+n) - \ln(n) - \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \ln(n+1) - \ln(n) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

$$= \ln(N+1) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

$$= -t_n$$

Donc :

$$l = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{N \to +\infty} -t_n$$

$$= -\gamma$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

II.F - Une expression intégrale de γ.

On pose $I = \int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) dt$.

II.F.1) Montrer l'existence de I.

- La fct $t \mapsto \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}$ est continue sur $]0,1[$ et positive
$\left(\text{car } \ln(1-t) \leq -t \Rightarrow \frac{-1}{t} \leq \frac{1}{\ln(1-t)} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right)$
- $\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \underset{1^-}{\sim} 1$, et puisque $\int_0^1 1\,dt$ converge, alors I converge en 1.
- On a $\ln(1-t) \underset{0}{=} -t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, donc
$\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{0}{=} -1 - \frac{t}{2} + o(t)$
Parsuite,
$\frac{t}{\ln(1-t)} \underset{0}{=} \frac{-1}{1 + \frac{t}{2} + o(t)} \underset{0}{=} -\left(1 - \frac{t}{2} + o(t)\right)$
$\underset{0}{=} -1 + \frac{t}{2} + o(t)$
Alors : $1 + \frac{t}{\ln(1-t)} \underset{0}{=} \frac{t}{2} + o(t)$.
D'où :
$\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o(1)$
Ainsi, $\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$, et puisque $\int_0 \frac{1}{2}\,dt$ converge alors I converge en 0.
D'où, l'existence de $I = \int_0^1 \frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\,dt$

II.F.2) Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx$ et que l'application

$\Phi : x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ est bornée sur $]0, +\infty[$.

- On pose $x = -\ln(1-t)$. La fct $t \mapsto -\ln(1-t)$ est de classe C^1 sur $[0,1[$ et bijective de $[0,1[$ dans $[0,+\infty[$ avec
$dx = \frac{dt}{1-t} \Rightarrow dx = dt\, e^x \quad (1-t = e^{-x})$
Donc :
$\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx$
- Soit $x > 0$, on a :
$1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$1 - \frac{1}{1+x} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - (1-x)$$

$$\frac{x}{1+x} \leq 1 - e^{-x} \leq x$$

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{1-e^{-x}} \leq 1 + \frac{1}{x}$$

Donc,

$$0 \leq \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \leq 1$$

i.e

$$0 \leq \Phi(x) \leq 1$$

Ainsi, Φ est bornée.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515