

EXERCICE 1 : (6.5 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2

On considère la fonction numérique f_n définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f_n(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[; f_n(x) = x - x^n \ln x$$

Et on note (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

0.25 1-a) Montrer que f_n est continue à droite en 0

0.75 b) Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0 et que son nombre dérivé à droite en 0 est égal à 1

0.5 d) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in]0, +\infty[; f_n'(x) = 1 - x^{n-1} - nx^{n-1} \ln x$$

0.5 e) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

0.5 2-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\forall x \in [0, +\infty[; f_{n-1}(x) \leq f_n(x)$

0.25 b) En déduire la position relative des deux courbes (C_n) et (C_{n-1})

0.5 3-a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un unique réel $\alpha_n \in]1; 2[$ tel que : $f_n(\alpha_n) = 0$
(On prendra $\ln 2 = 0,7$)

0.25 b) Vérifier que $(\forall n \geq 2) \quad \alpha_{n+1}^n \ln \alpha_{n+1} = 1$

0.25 c) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $f_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1} - 1$

0.5 d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ ainsi définie est strictement décroissante.

0.25 e) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est convergente.

4- On pose : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

0.25 a) Montrer que : $1 \leq \ell \leq 2$

0.5 b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $n-1 = -\frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$

0.25 c) On suppose que $\ell > 1$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)}$ en fonction de ℓ

0.5 d) En déduire la valeur de la limite ℓ

EXERCICE2 : (3.5 points)

0.25 1-a) Calculer l'intégrale : $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

0.5 b) Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{kn} \frac{n}{n^2+k^2}$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente puis déterminer sa limite.

0.25 2- Montrer que : $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \leq 1$

0.5 3-a) Montrer que : $(\forall x \in [0,1]) ; 0 \leq e^x - 1 \leq e.x$

0.25 b) En déduire que : $(\forall x \in [0,1]) ; 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{e}{2}x^2$

4- Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $w_n = \sum_{k=1}^{kn} \left(e^{\frac{n}{n^2+k^2}} - 1 \right)$

0.25 a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2} \sum_{k=1}^{kn} \left(\frac{n}{n^2+k^2} \right)^2$

0.25 b) Montrer que la fonction : $x \mapsto (1+x^2)^{-2}$ est strictement décroissante sur $[0,1]$

0.25 c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout entier $k \in \{1,2,\dots,n\}$, on a :

$$\frac{1}{n} \left(1 + \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right)^{-2} \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (1+x^2)^{-2} dx$$

0.5 5-a) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq w_n - u_n \leq \frac{e}{2n}$

0.5 b) En déduire que la suite $(w_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE3 : (3.5 points)

Soit $m \in \mathbb{C}^*$

Partie I : On considère dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z

$$(E) : z^2 - (2+i)mz + m^2(1+i) = 0$$

0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta = (im)^2$

0.5 b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E)

2- Soient z_1 et z_2 les deux solutions de (E)

0.5 Mettre sous la forme exponentielle $z_1 z_2$ dans le cas où $m = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$)

Partie II : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

On pose $z_1 = m$ et $z_2 = m(1+i)$

Soit M_1 le point d'affixe z_1 , M_2 le point d'affixe z_2 et $M_3(z_3)$ l'image du point O par

la rotation de centre M_2 et d'angle $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $M_4(z_4)$ l'image du point M_1 par

l'homothétie de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^* - \{1\}$)

0.75 1- Calculer z_3 en fonction de m et z_4 en fonction de m et k

0.75 2- Donner la forme algébrique de $\frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1} \times \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}$

0.75 3- En déduire que les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sont cocycliques si et seulement si $k = -2$

EXERCICE4 : (3.5 points)

On munit l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes de la loi de composition interne $*$ définie par : $\forall (x, x', y, y') \in \mathbb{R}^4 ; (x + iy) * (x' + iy') = (xy' + y^2 x') + iyy'$

Partie I :

0.25 1- a) Vérifier que : $1 * 2i = 2$

0.25 b) Montrer que la loi de composition interne $*$ n'est pas commutative.

0.5 2- Montrer que la loi $*$ est associative.

0.25 3- a) Vérifier que : $1 * (1 + 2i) = 2$

0.25 b) En déduire que $(\mathbb{C}, *)$ n'est pas un groupe.

4- Soit E le sous-ensemble de \mathbb{C} défini par $E = \{x + yi / x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}^*\}$

0.25 a) Montrer que E est stable dans $(\mathbb{C}, *)$

0.5 b) Montrer que $(E, *)$ est un groupe non commutatif.

Partie II :

On considère les sous-ensembles de E définies par : $F = \{yi / y \in \mathbb{R}^*\}$ et

$G = \{x + i / x \in \mathbb{R}\}$

0.5 1- Montrer que F est un sous-groupe de $(E, *)$

2- On considère l'application φ définie de \mathbb{R} vers \mathbb{C} par : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \varphi(x) = x + i$

0.25 a) Montrer que : $\varphi(\mathbb{R}) = G$

0.25 b) Montrer que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{C}, *)$

0.25 c) En déduire que $(G, *)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 5 : (3 points)

1- En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer l'entier $u \in \{1, 2, \dots, 22\}$ tel que :

$$10u \equiv 1 \pmod{23}$$

2- Soient m un entier naturel et q et r , respectivement, le quotient et le reste de la division euclidienne de m par 10

a) Montrer que : $m \equiv 10(q + ur) \pmod{23}$

b) Montrer que : $23 \text{ divise } m \Leftrightarrow 23 \text{ divise } (q + ur)$

3- On considère dans \mathbb{N} le système (S) :
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{23} \\ x \equiv 2 \pmod{10} \end{cases}$$

a) Montrer que si x est une solution du système (S) alors il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $x = 10q + 2$ et 23 divise $(q + 7)$

b) Résoudre dans \mathbb{N} le système (S)

FIN