obsessed with perfection

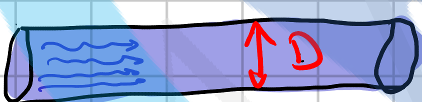
YOUNESS SCHOOL
Education without limits

Mécanique des fluides

Système étudié

Un fluide : un syst. qui peut s'écouler.
(gaz, liquide, galaxies, voitures, ...etc)

Macroscopique

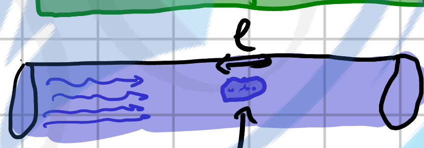


Caractéristiques :
- m_{tot}, V_{tot}
- pression
- température, ρ

⇓ problème

- taille ↗
- on ne peut pas appliquer la mécanique ⇒ thermo.

Mésoscopique



particule fluide

Caractéristiques :
- masse $dm = cte$
- taille :

$D \gg l \gg d$
(D : m ; l : μm ; d : 1 nm)

- volume : $d\tau$
- masse volumique

$dm = \rho \, d\tau$

Microscopique

particules (d, H_2O)

Caractéristiques :
- m_i, x, y, z
- $\vec{r}(M/R)$, $\vec{a}(M/R)$

problème

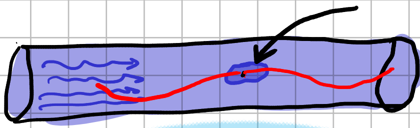
- $N \sim N_A$ particules (10^{23})
  ↳ N equations.
- $N-1$ interactions ⇒ $N-1$ forces

Description

Lagrange

Mécanique du point / des solides

des coordonnées (x, y, z)

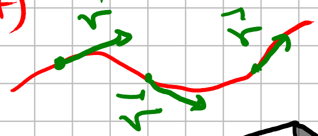


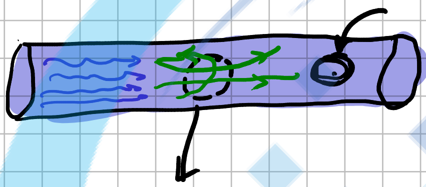
↳ une trajectoire $\begin{cases} x(y) \\ y(z) \end{cases}$

Euler

⇒ Électrostatique / magnéto + fluide

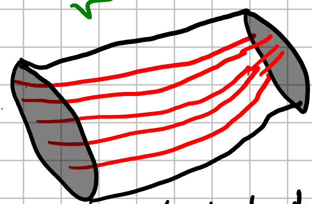
$\vec{E}(M,\cancel{t})$ $\vec{B}(M,t)$





région observée

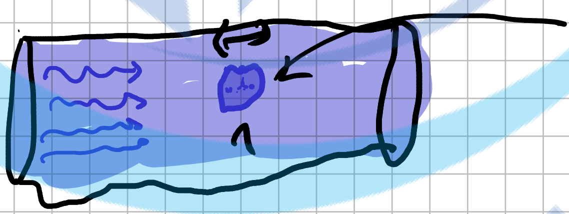
- ligne de courant
- Tube de courant

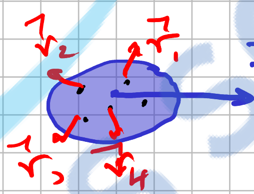


↳ $\vec{v}(\text{région}, t)$ ⟹ Champ de vitesse $\vec{v}(\underbrace{x,y,z}_{\text{région}},t)$

⇒ x, y, z, t sont indépendants

Champ de vitesse : $\vec{v}(M,t)$

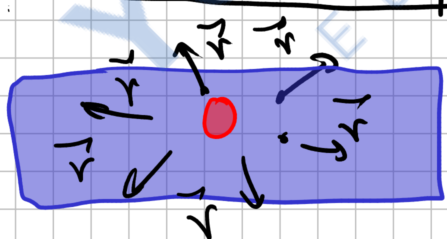




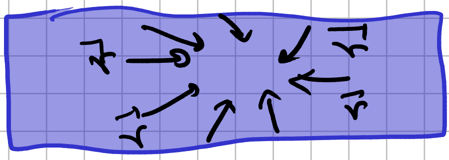
$$\vec{v}(M,t) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i}{N}$$

Types d'écoul.

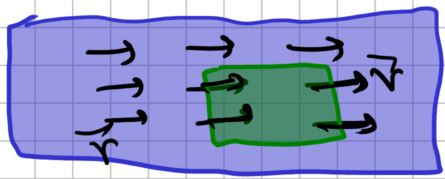
- écoulement stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$
- écoulement incompressible $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = 0}$



⟺ $\mathrm{div}\,\vec{v} > 0$



$\Leftrightarrow$ $div\ \vec{v} < 0$



$\Rightarrow$ $div\ \vec{v} = 0$

$$\vec{A} = A_x \vec{e_x} + A_y \vec{e_y} + A_z \vec{e_z}$$

Base cartésienne :

$$div(\vec{A}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Base cylindrique :

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

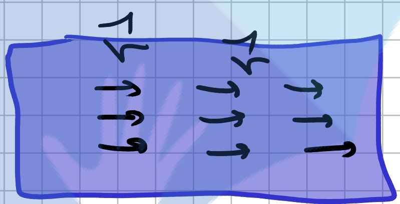
Base sphérique :

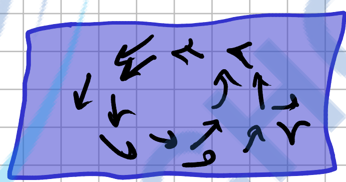
$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\ sin(\theta)}\frac{\partial sin(\theta) A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\ sin(\theta)}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

- Écoulement irrotationnel $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{rot}(\vec{v}) = \vec{0}}$

vecteur tourbillon

$$\boxed{\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\vec{rot}\ \vec{v}}$$





$\vec{rot}\ \vec{v} = \vec{0}$ // $\vec{rot}\ \vec{v} \neq \vec{0}$

↳ écoulement potentiel :

$$\Rightarrow \boxed{\underset{m/s}{\vec{v}} = \underset{m^{-1}}{\vec{grad}}\ \underset{m^2 \cdot s^{-1}}{\phi}}$$

ϕ : potentiel de vitesse.

$\Downarrow$

si l'écoulement est irrotationnel + incompressible

$\Rightarrow$ $div\ \vec{v} = 0$ et $\vec{rot}\ \vec{v} = \vec{0}$; $\vec{v} = \vec{grad}\ \phi$

↳ $div(\vec{grad}\ \phi) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Delta \phi = 0}$

Exercice 1:

On considère l'écoulement bidimensionnel défini par le champ des vitesses :

$$\vec{v}(M,t) = K(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$$

1) Préciser la dimension et l'unité de K

2) Montrer que l'écoulement est incompressible.

3) Montrer que l'écoulement est rotationnel et déduire l'expression du vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$

1)

$$\underbrace{[v] = [K][y]}_{} = [K][x]$$

$$[K] = \frac{[v]}{[y]} = \frac{L.T^{-1}}{L} = T^{-1}$$

dimension

l'unité s^{-1}

2)

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial z}$$

0

$$= \frac{\partial -Ky}{\partial x} + \frac{\partial Kx}{\partial y} = 0 + 0$$

$\Rightarrow$ l'écoulement incompressible.

3)

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial y} - \frac{\partial \cancel{v_y}}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial \cancel{v_x}}{\partial z} - \frac{\partial \cancel{v_z}}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \left(\frac{\partial Kx}{\partial x} - \frac{\partial -Ky}{\partial y}\right)\vec{e}_z$$

$$= (K - (-K))\vec{e}_z = 2K\vec{e}_z$$

$\Rightarrow \vec{rot}\,\vec{v} = 2K\vec{e}_z \neq \vec{0}$ rotationnel

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\,\vec{rot}\,\vec{v} = K\,\vec{e}_z .$$

Remarque:

notation

$$\vec{grad}(f) = \vec{\nabla} f$$

$$div(\vec{A}) = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{rot}(\vec{A}) = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A}$$

Exercice 2:

On étudie l'écoulement d'un fluide caractérisé par le champ de vitesses en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v}(M,t) = \left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)\vec{e}_\varphi = v(r)\,\vec{e}_\varphi$$

Où α et β sont des constantes.

1) Caractériser l'écoulement : est-il stationnaire? compressible? tourbillonnaire ?

2) Calculer l'accélération d'une particule fluide.

1)

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \left(\alpha\,\cancel{\frac{\partial r}{\partial t}}^{\,0} + \beta\,\cancel{\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial t}}^{\,0}\right)\vec{e}_\varphi$$

r et t sont indep.

$$= \vec{0} \Rightarrow$$ l'écoulement est stationnaire.

$$div\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r)}{\partial\varphi} = 0 \Rightarrow$$ l'écoul. est incompressible.

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_\varphi = A_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = -\cancel{\frac{\partial v}{\partial z}}^{\,0}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial r v(r)}{\partial r}\vec{e}_z = \frac{1}{r}\frac{\partial r v(r)}{\partial r}\vec{e}_z$$

$$\rightarrow\ \vec{rot}(\vec{A}) = \left(\frac{1}{r}\cancel{\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\cancel{\frac{\partial A_r}{\partial z}} - \cancel{\frac{\partial A_z}{\partial r}}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \cancel{\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}}\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\left(\alpha r + \frac{\beta}{r}\right)\right)\vec{e}_z$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\alpha r^2 + \beta\right)\vec{e}_z = \frac{1}{\cancel{r}}\left(2\alpha \cancel{r}\right)\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{rot}\,\vec{v} = 2\alpha\,\vec{e}_z} \Rightarrow$$ écoulement est rotationnel

On s'intéresse à un tuyau qui fait jaillir de l'eau de manière radiale (on ne s'intéressa pas à l'écoulement dans le tuyau mais à l'écoulement à l'extérieur du tuyau, une fois que le fluide a traversé la paroi poreuse). Le système est à symétrie cylindrique, d'axe OZ, l'axe du tuyau poreux. On admet que le fluide est rejeté du tuyau en $r = R$ avec une vitesse v_0 radiale, on se place en régime permanent et on néglige toute effet de bord.

1) Expliquer pourquoi le champ de vitesse est :

$$\vec{v}(M,t) = v(r)\vec{e}_r$$

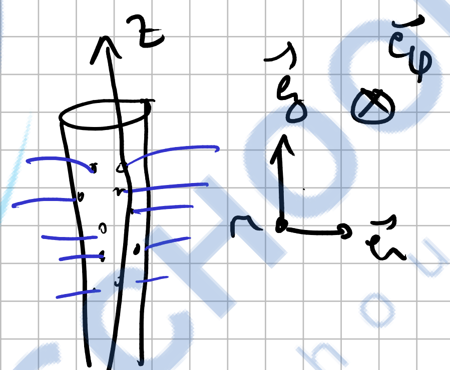
2) En supposant que l'écoulement est incompressible, déterminer l'expression de $v(r)$

3) Dessiner la carte des lignes de courant.

4) Calculer $\vec{rot}(\vec{v})$.Commenter.

5) Montrer que le champ des vitesse dérive d'un potentiel scalaire $\Phi(r)$ à exprimer.

① l'écoulement est radial :



$$\Rightarrow \vec{v}(M,t) = v(M,t)\,\vec{e}_r$$

régime permanent

$$v(M,t) = v(M) = v(r,\varphi,z)$$

symétrie cylindre $\Rightarrow$ invariance par rotation

$$\Rightarrow v(r,\varphi,z) = v(r,z)$$

effet de bord négligeable :

$$v(r,z) = v(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(M,t) = v(r)\,\vec{e}_r}$$

② $\quad \operatorname{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow$

$$div(\vec{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \cancel{A_\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \cancel{A_z}}{\partial z}$$

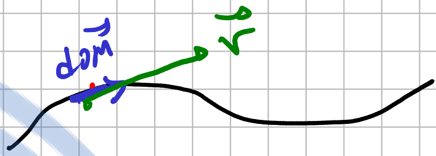
$$\frac{1}{r}\frac{\partial\, r v(r)}{\partial r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial\, r v(r)}{\partial r} = cte = A$$

$$\Rightarrow r\, v(r) = A r + B$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r) = A + \frac{B}{r}}$$

3)

$$\boxed{\vec v \wedge d\vec{OM} = \vec 0}$$



$$\cancel{v(r)}\, \vec e_r \wedge \left(dr\, \vec e_r + r\, d\varphi\, \vec e_\varphi + dz\, \vec e_z\right) = \vec 0$$

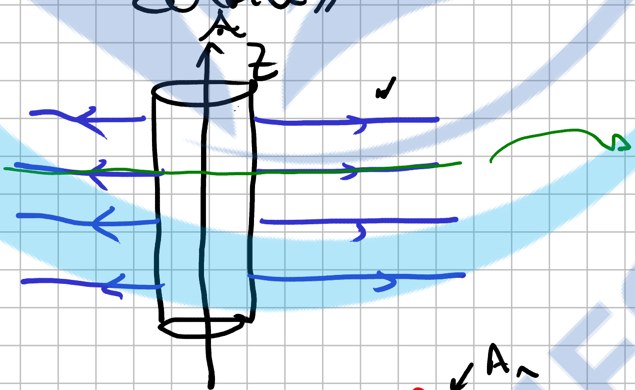
$$r\, d\varphi\, \vec e_z - dz\, \vec e_\varphi = \vec 0$$

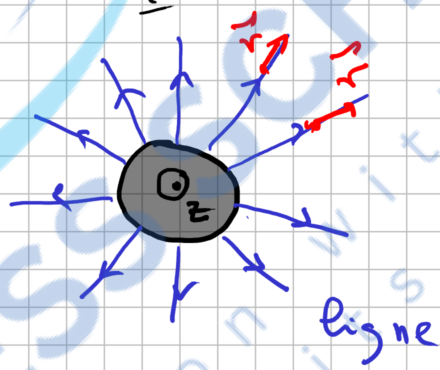
$$\Rightarrow r\, d\varphi = 0 \quad \text{et} \quad dz = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = cte \quad \text{et} \quad z = cte$$

↓ droite //

↳ plan (xy)





4)

$$\vec{rot}\, \vec v = \vec{rot}\left(\underbrace{v(r)}_{v_r = A_r}\, \vec e_r\right) = \underbrace{\frac{\partial \cancel{v(r)}}{\partial z}}_{0}\, \vec e_\varphi - \frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial\, \cancel{r v(r)}}{\partial \varphi}}_{0}\, \vec e_z$$

$$\vec{rot}(\vec A) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \cancel{A_z}}{\partial\varphi} - \frac{\partial \cancel{A_\varphi}}{\partial z}\right)\vec e_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial \cancel{A_z}}{\partial r}\right)\vec e_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r \cancel{A_\varphi})}{\partial r} - \frac{\partial r A_r}{\partial\varphi}\right)\vec e_z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{rot}\, \vec v = \vec 0}} \Rightarrow \text{l'écoul. est } \underline{\underline{\text{irrotationnel}}}$$

5) $\vec{rot}\,\vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{rot}(\vec{grad}\, f) = 0 \quad \forall f$

$\Rightarrow \exists\, \phi$ telle que $\boxed{\vec{v} = \vec{grad}\,\phi}$

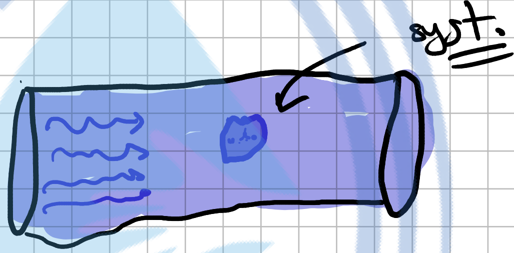
$$\left(A + \frac{B}{r}\right)\vec{e}_r = \frac{\partial \phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow A + \frac{B}{r} = \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(r) = A r + B \ln(r)}$$

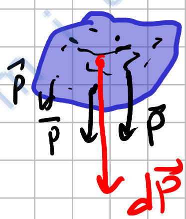
Dynamique

syst.

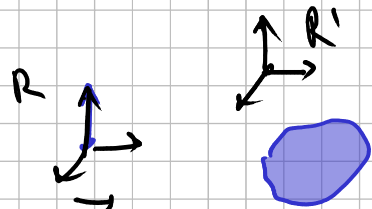


forces :
- → ponctuelle
- → volumique : poids, Coulomb, Lorentz, Laplace... inertie
- → surfacique : pression, viscosité
- → ~~linéique~~

Poids



$$d\vec{P} = dm\, \vec{g}$$
$$= \rho\, d\tau\, \vec{g}$$
$$\Rightarrow \vec{f}_p = \frac{d\vec{P}}{d\tau} = \rho\, \vec{g}$$



inertie

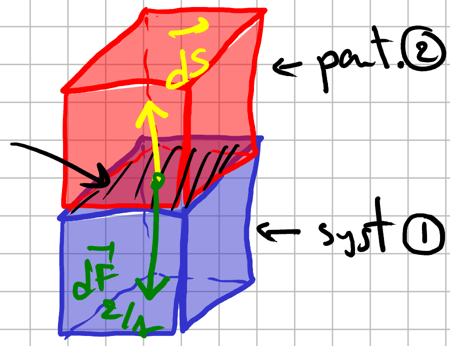
$$d\vec{F}_{ie} = -dm\, \vec{a}_e = -\rho\, d\tau\, \vec{a}_e$$

$$d\vec{F}_{ic} = -dm\, \vec{a}_c = -\rho\, d\tau\, \vec{a}_c$$

pression

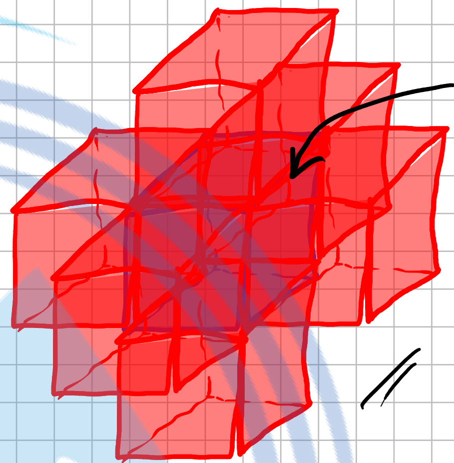
pression (Pa)

force surfacique $\quad d\vec{F}_{p\,2/1} = -P\,\vec{dS}$



la force volumique totale :

$$d\vec{F}_p = -\overrightarrow{grad}(p)\,d\tau$$



syst ①: entouré par 6 particule

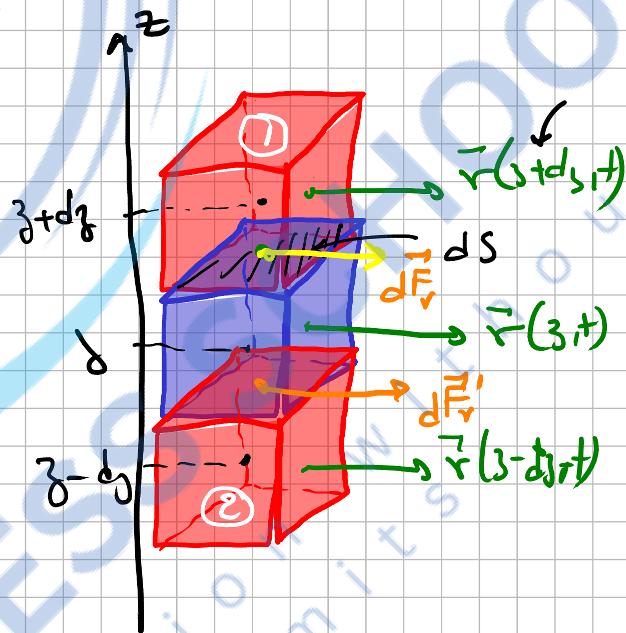
viscosité

$$\overset{N}{\rightarrow} d\vec{F}_{1/syst} = \eta\, dS\, \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

$N.m^{-2}.s$ $\quad m^2$ $\quad m.s^{-1}$ $\quad m$

viscosité dynamique

$(N.m^{-2}.s = Pa.s = Pl)$



viscosité cinématique

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

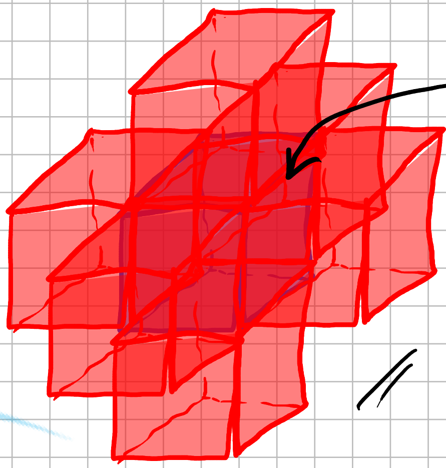
η → dépend de la force ⇒ fluide non newtonien

→ ne dépend pas de la force ⇒ fluide st newtonien

La force totale

$$d\vec{F}_v = \eta \Delta \vec{v}$$

(c'est pour un écoulement incompressible)



syst ① : entouré par 6 particule

L'accélération

$$\vec{v}(M,t) \Rightarrow \vec{a} \neq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}dz$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v_x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{v_y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\underbrace{\frac{dz}{dt}}_{v_z}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\text{accélération locale}} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\vec{grad})\vec{v}}_{\text{accélération convective}}}$$

Dérivée particulaire.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{grad})\rho$$

Exemple

$$\vec{v}(M,t) = Axt\,\vec{e}_x - Byt^2\,\vec{e}_y$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{grad})\vec{v}$$

$$= (Ax\,\vec{e}_x - 2Byt\,\vec{e}_y) + \left[(Axt\,\vec{e}_x - Byt^2\,\vec{e}_y)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z\right)\right]\left[Axt\,\vec{e}_x - Byt^2\,\vec{e}_y\right]$$

$$= \left(Ax\,\vec{e}_x - 2Byt\,\vec{e}_y\right) + \left(Axt\frac{\partial}{\partial x} + Byt^2\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{v}$$

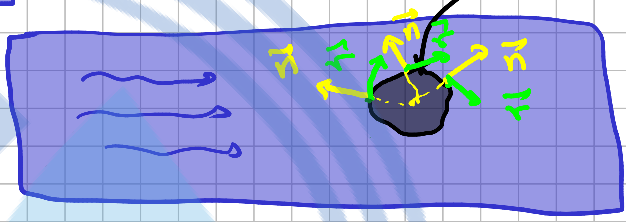
$$= \left(Ax\,\vec{e}_x - 2Byt\,\vec{e}_y\right) + \left(Axt \cdot At\,\vec{e}_x + Byt^2 Bt^2\,\vec{e}_y\right)$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(Ax + A^2xt^2\right)\vec{e}_x + \left(-2Byt + B^2yt^4\right)\vec{e}_y}$$

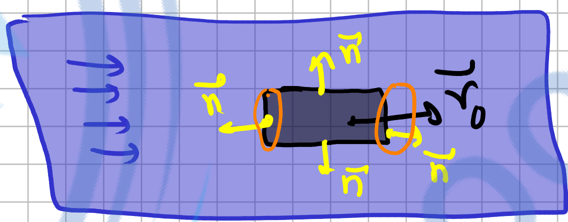
Conditions aux limites :

$$\vec{v}(M\in\text{obstacle}, t)\cdot\vec{n} = 0$$

obstacle fixe



$$\vec{v}(M\in\text{obstacle}, t)\cdot\vec{n} = \vec{v}_0\cdot\vec{n}$$



A la frontière :

$\vec{v} = \vec{0}$ à cause de la viscosité