Ondes

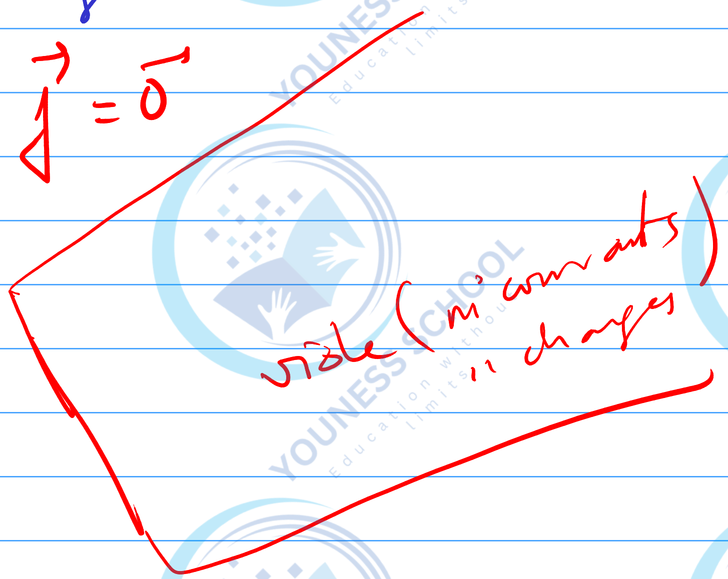
Chap 01: Propagation du champ électromagnétique

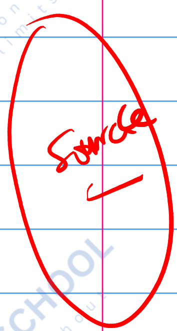
Onde : Perturbation dans l'espace qui se propage au cours du temps

1- Équation de propagation des ondes électromagnétiques

On s'intéresse dans notre chapitre à la propagation du champ électromagnétique dans une zone où on a absence des charges et des courants

$$\rho = 0 \ , \ \vec{J} = \vec{0}$$





Équations de Maxwell

Maxwell-Gauss : $\operatorname{div}\vec{E}(M,t) = 0$

" -Faraday $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

" -Flux $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

" - Ampère $\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

• équation de propagation du champ $\vec{E}$:

M.F. $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = \vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}(\vec{E})) - \Delta\vec{E}$

Or d'après M-G : $\operatorname{div}\vec{E} = 0$, d'où $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = -\Delta\vec{E}$

$$\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\operatorname{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B})$$

M-A permet d'écrire : $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}(\vec{E})) = -\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

$$-\Delta\vec{E} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{E} - \overset{?}{\widetilde{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\frac{\cancel{E}}{L^2} = [\mu_0\varepsilon_0]\frac{E}{T^2}$$

$$[\mu_0\varepsilon_0] = \frac{T^2}{L^2} = \frac{1}{(L/T)^2}$$

On définit $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$: La célérité de propagation des OEM dans le vide.

$c \simeq 3.10^{8}\ m\cdot s^{-1}$

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Équation de propagation du champ électromagnétique

Équation de D'Alembert.

Pour $\vec{B}$:

$$\vec{rot}(\vec{rot}\vec{B}) = \mu_0\varepsilon_0\,\vec{rot}\left(\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{rot}\vec{E}\right)$$

$\vec{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ (M-F)

$$-\Delta\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$-\Delta\vec{B} = -\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

On définit l'opérateur D'Alembertien : $\Box$

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box\vec{E} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Box\vec{B} = \vec{0}$$

Remarque : L'équation de D'Alembert est invariante par symétrie d'espace et renversement du temps.

$$\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$f(z,t)$, $\Delta f = \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} z \to -z \\ t \to -t \end{cases} \qquad \frac{\partial^2 f}{(\partial(-z))^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial(-t)^2} = \frac{\partial}{\partial(-z)}\left(\frac{\partial f}{\partial(-z)}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial(-t)}\left(\frac{\partial f}{\partial(-t)}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{(\partial z)^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0}$$

→ symétrie + réversibilité

Équation de la diffusion $\Delta T - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

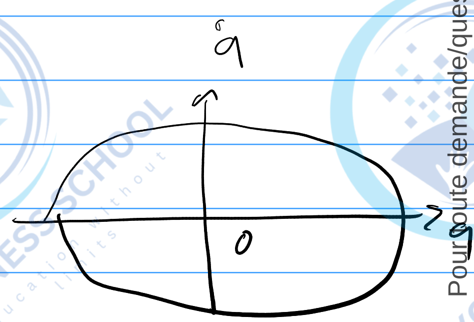
$t = -t'$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{D}\frac{\partial T}{\partial t'}\Big) ?$$

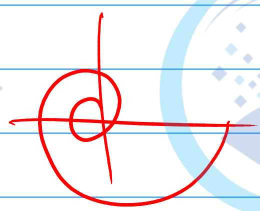
- $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0}$$



en présence d'amortissement

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\lambda\frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0$$



2/ Solution d'équation de D'Alembert :

$$* \quad \Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \qquad f(z,t).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) f = 0$$

$$p = t + \frac{z}{c} \qquad q = t - \frac{z}{c}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{-1}{c}\frac{\partial}{\partial q} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right)$$

$$\cdot \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}$$

$$\left\{\frac{1}{c}\left(\cancel{\frac{\partial}{\partial p}} - \frac{\partial}{\partial q}\right) - \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial q} + \cancel{\frac{\partial}{\partial p}}\right)\right\}\left\{\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial q}\right) + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}\right)\right\}$$

$$\left\{ + \frac{1}{\cancel{c}}\frac{\partial}{\partial q} \times \frac{1}{\cancel{c}}\frac{\partial}{\partial p}\right\} f = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}(f) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = 0$$

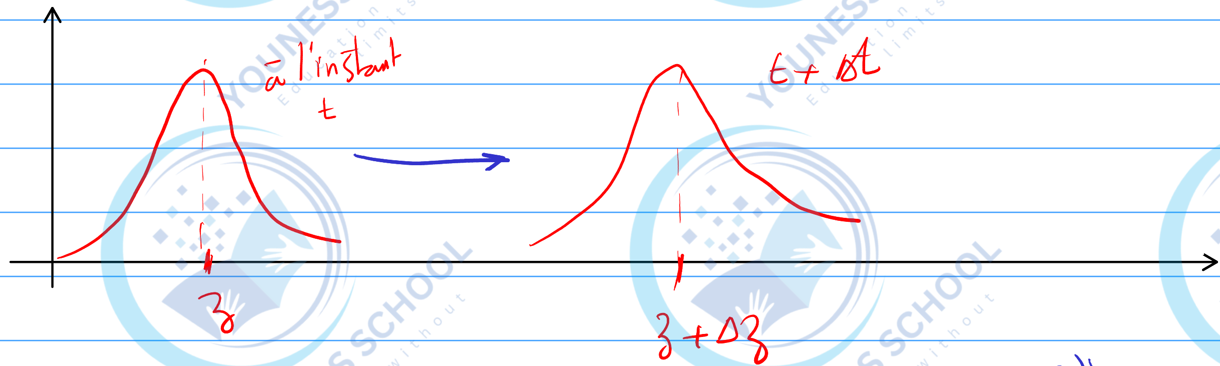
$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial p}=f(p).$$

$$f(p,q)=F(p)+G(q)$$

$$f(p,q)=F(p)+G(q)$$

$$\boxed{f(z,t)=F\left(t+\frac{z}{c}\right)^{*}+G\left(t-\frac{z}{c}\right)}$$



$G\left(t-\frac{z}{c}\right)$ $\quad G\left(t-\frac{z}{c}\right)=G\left((t+\Delta t)-\frac{(z+\Delta z)}{c}\right)$

Ceci est vrai ssi $-\frac{\Delta z}{c}+\Delta t=0 \iff \Delta z=+c\Delta t$

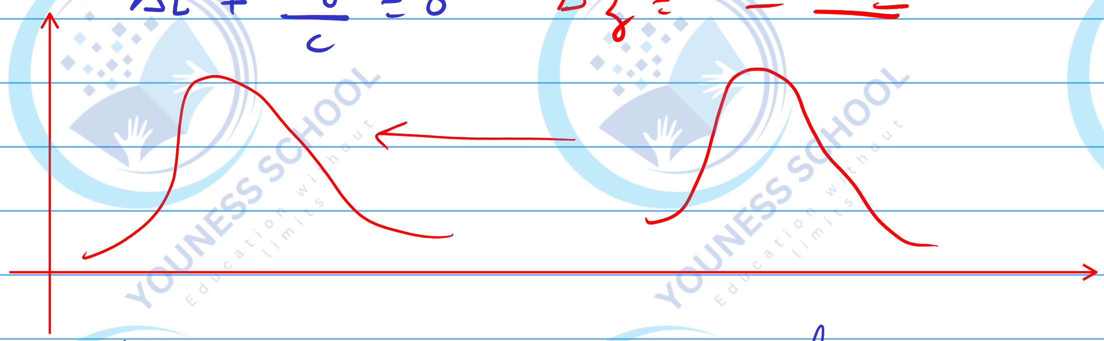
$\Delta z>0$

• $G\left(t-\frac{z}{c}\right)$ est onde plane qui se propage selon z croissant OP si se propage vers z (Δz)

$$\left(k(+z-ct)\right)$$

$F(t+\frac{z}{c})$ $\quad F(t+\frac{z}{c}) = F(t+\Delta t + \frac{z+\Delta z}{c})$

$\Delta t + \frac{\Delta z}{c} = 0 \quad \Delta z = -\underline{c\Delta t} < 0$

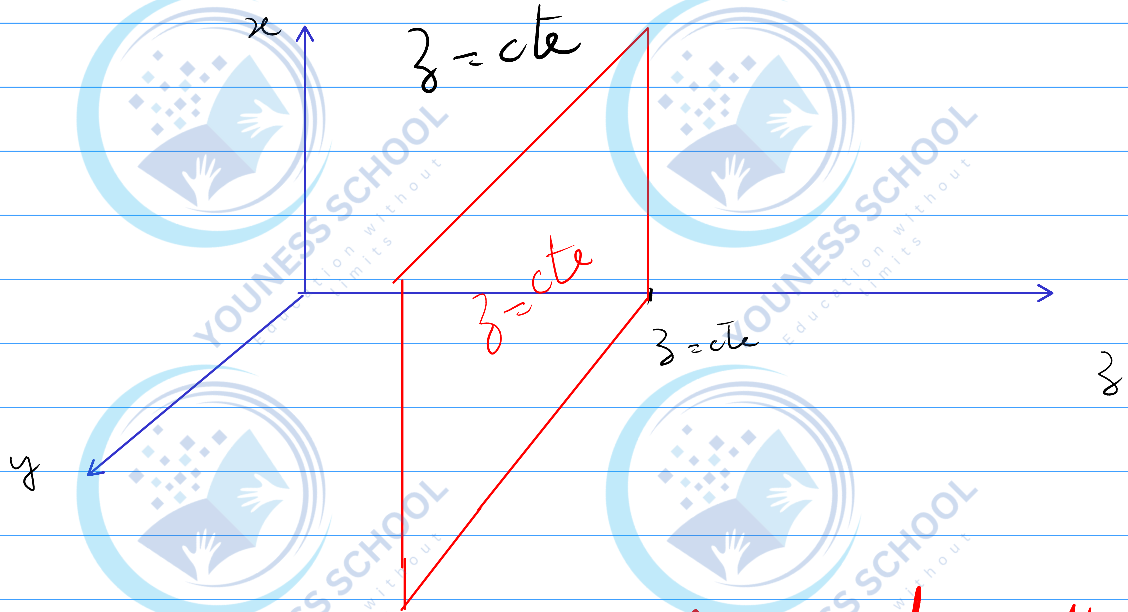


onde plane qui se propage dans le sens des z décroissants $-(x+ct)$

* Surface d'onde : La surface d'onde est la surface donnée par l'équation $f(x,t) = cte$ à t donnée.

$F(t+\frac{z}{c})$: $\quad F(t+\frac{z}{c}) = cte \quad$ t donnée

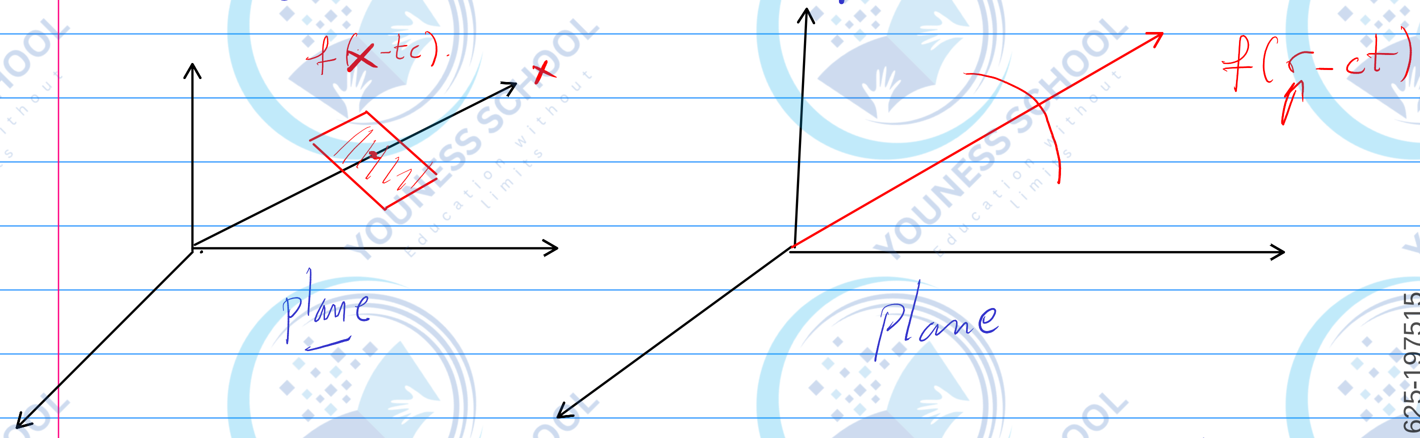
$z = cte$



Pour $F(t+\frac{z}{c})$ ou $G(t-\frac{z}{c})$ la surface d'onde est un plan $\Rightarrow$ ondes planes.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On dit qu'une onde est plane s'il existe un système de coordonnées cartésiens tel que l'onde ne dépend que d'une seule coordonnée et du temps



$\times$ $$f(x,y,t) = f(x).g(\underbrace{y-ct}_{\times})$$ $\times$ c'est pas une onde plane

Remarque :

Dans certaines situation $f(x,t) = g(t)\times h(x)$ = solutions en ondes stationnaires.

$$f(x,t) = cte \quad \text{à } t \text{ fixé}$$

$$\boxed{x = cte}$$

N.B : L'équation de D'Alembert admet comme solution la superposition de deux ondes planes, l'une se propage selon z ↑ et l'autre selon z ↓ avec la célérité c.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Exercice : Soit $f(r,t) = f(r,t)$ onde sphérique, $\Delta f - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$.

déterminer $f(r,t)$?

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

$\times r$

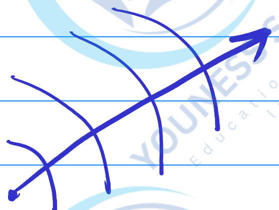
$$\frac{\partial^2 rf}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 (rf)}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0$$

$$h(r,t) = F(r-ct) + G(r+ct)$$

$$r f(r,t) = F(r-ct) + G(r+ct)$$

$$f(r,t) = \underline{\underline{\frac{1}{r}}}\left\{F(r-ct) + G(r+ct)\right\}$$



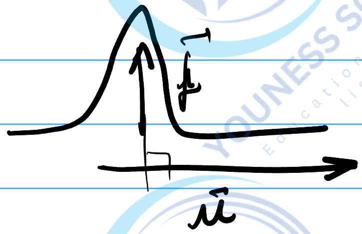
Atténuation

Amplification.

* ondes transversales – ondes longitudinales.

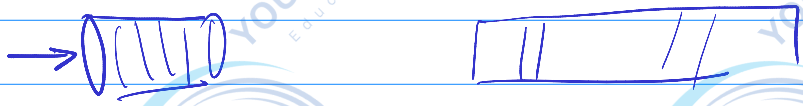
Soit $\vec{u}$ la direction de propagation :

si la perturbation $\vec{f}(M,t) \perp \vec{u}$: l'onde est transversale



- onde sur une corde.
- " lumineuse.
- ondes sur la surface d'eau.

. Si $\vec{f} \parallel \vec{u}$: onde longitudinale :
- Sonores
-



(Ressort de [illegible])

Relation de structure :

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = \vec{E}_+(M,t) + \vec{E}_-(M,t) \\ \vec{B}(M,t) = \vec{B}_+(M,t) + \vec{B}_-(M,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{E}(M,t) = \vec{E}_{(+)}(z-tc) + \vec{E}_{(-)}(z+tc) \\ \vec{B}(M,t) = \vec{B}_{(-)}(z-tc) + \vec{B}_{(-)}(z+tc) \end{cases}$$

M-G donne : $\operatorname{div}\vec{E} = 0$

$$\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial x}} + \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial y}} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

E_z ne dépend pas de z, $E_z = k(t) = 0$ Pas de propagation

$\vec{E} = E_x(z,t)\,\vec{e_x} + E_y(z,t)\,\hat{e_y}$

$\vec{E}\cdot\vec{e_z} = 0 \qquad \vec{E} \perp \vec{e_z}$

$\hat{e_z}$: direction de propagation.

$\vec{E}$: Perturbation.

L'onde électromagnétique est transversale.

$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \Rightarrow \boxed{B_z = 0}$

$\vec{B} \perp \vec{e_z}$

Montrer que $\vec{\nabla} = -\dfrac{\vec{u}}{c}\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}$ — $\vec{u}$ direction de propagation.

Soit $\vec{E} = \vec{E}(z-ct)$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{u_z})}{\partial z} = \vec{u_z}\cdot\frac{\partial\vec{E}(z-ct)}{\partial z}$$

$$= \vec{u_z}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial(z-ct)} \times \underbrace{\frac{\partial(z-ct)}{\partial z}}_{=1}$$

$$\frac{\partial(z-ct)}{\partial t} = -c$$

$$= \vec{u_z}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\left(-\frac{1}{c}\right)\times 1$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = -\frac{\vec{u_z}}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\right)$$

$$\boxed{\vec{\nabla} = -\frac{\vec{u}}{c}\,\frac{\partial}{\partial t}}$$

Maxwell-Faraday

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

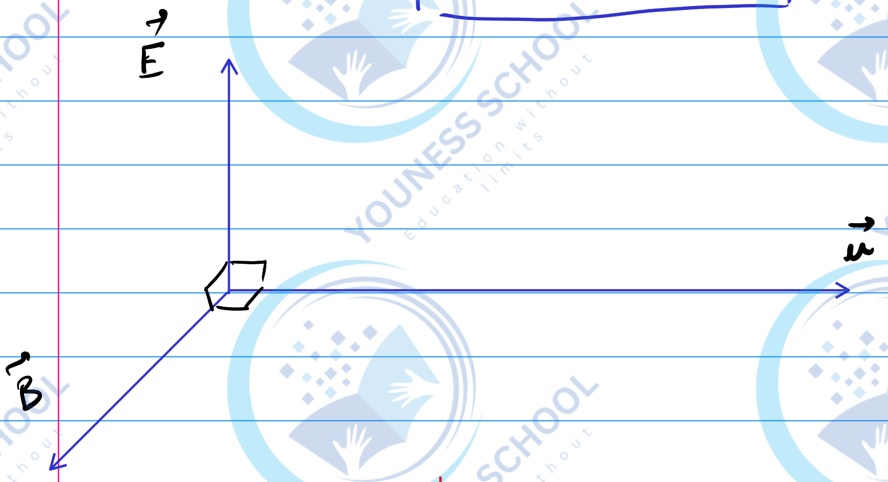
$$+\frac{\vec{u}}{c}\frac{\partial}{\partial t} \wedge \vec{E} = +\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}\right) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$(\vec{u}, \vec{E}, \vec{B})$ forme un trièdre direct

* M.A. $\boxed{\vec{E} = -c\,\vec{u} \wedge \vec{B}}$ Relation de structure



- Puissance d'une onde élect $\propto E^2 \times S$ = infinie !!

Solution en onde plane progressive monochromatique (Harmonique) OPPH.

Théorie de Fourier :

OPPH s'écrit sous la forme : phase à l'instant t

$$f(M,t) = \underline{f_0} \cos\left(\overbrace{\omega t \pm \vec{k}\cdot\vec{r}}^{\text{phase à l'instant } t} + \varphi_0\right)$$

Amplitude de l'onde

pulsation

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$

Vecteur d'onde (m^{-1})

phase à l'origine ($\vec{r}=\vec{0}, \underline{t=0}$)

- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ← période (s) (Période temporelle)

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ← Longueur d'onde (m) (" spatiale)

Double périodicité → en temps, → en espace

$\sigma = \frac{1}{\lambda}$: Nombre d'onde.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515