Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Chapitre I: Complément d'algèbre linéaire.

Ex n°1) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(1) $f_n(x) = x^n e^x$:

Mq $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre

Soit $(f_{n_1}, \dots, f_{n_k})$ une sous-famille finie de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $n_i \neq n_j$ si $i \neq j$

Mq $(f_{n_1}, \dots, f_{n_k})$ est libre

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i} = 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\lambda_1 f_{n_1} + \lambda_2 f_{n_2} + \dots + \lambda_k f_{n_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{n_i} \underbrace{e^x}_{\neq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{n_i} = 0$$

On a $x \longrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{n_i}$ st

$$\lambda_1 x^{n_1} + \lambda_2 x^{n_2} + \dots + \lambda_k x^{n_k} = 0$$

une fct polynomiale nulle.

donc ses coef sont tous nulle.

$$\left(P = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!] \; a_k = 0 \right)$$

et les coef de $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{n_i}$ sont les $(\lambda_i)_{i \leq k}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $\forall i \in [\![1, k]\!]$ $\lambda_i = 0$

On peut déduire que $(f_{n_1}, \dots, f_{n_k})$ est libre

est libre $\Rightarrow$ $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

e) $f_n(x) = e^{nx}$.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre

Soit $(f_{n_1}, \dots, f_{n_k})$ une sous-famille finie de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq $(f_{n_1}, \dots, f_{n_k})$ est libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i} = 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i}(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e^{n_i x} = 0$$

$(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathbb{N}$

on peut ordonner les $(n_1, \dots, n_k)$

on peut supposer $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e^{n_i x} = 0$$

$$\lambda_1 e^{n_1 x} + \lambda_2 e^{n_2 x} + \dots + \lambda_k e^{n_k x} = 0$$

$$\Leftrightarrow e^{n_1 x} \neq 0 \left(\lambda_1 + \lambda_2 e^{(n_2 - n_1)x} + \dots + \lambda_k e^{(n_k - n_1)x} \right) = 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\forall x \in \mathbb{R}$

$n_2 - n_1 > 0$; $n_k - n_1 > 0$

$$\lambda_1 + \lambda_2 e^{(n_2-n_1)x} + \dots + \lambda_k e^{(n_k-n_1)x} = 0$$

on tend $x \longrightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} \lambda_1 + \sum_{i=2}^{k} \lambda_i e^{(n_i-n_1)x} = \lambda_1$$

donc $\boxed{\lambda_1 = 0}$

De même

$$\lambda_2 e^{n_2 x} + \dots + \lambda_k e^{n_k x} = 0$$

$$e^{n_2 x}\left(\lambda_2 + \lambda_3 e^{(n_3-n_2)x} + \dots + \lambda_k e^{(n_k-n_2)x}\right) = 0$$

$$\lambda_2 + \lambda_3 e^{(n_3-n_2)x} + \dots + \lambda_k e^{(n_k-n_2)x} = 0$$

$x \longrightarrow -\infty$.

$\lambda_2 = 0$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On procède de la même façon.

Pour démontrer que $\lambda_i = 0$

$\forall i \in [\![1, k]\!]$.

$(f_{n_i})_{1 \leq i \leq k}$ est libre, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$

est libre.

2ème rédaction :

Ordonner les $(n_i)_{1 \leq i \leq r}$ tq

$n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tq

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i} = 0$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Soit λ_p le premier scalaire non nul. $(\lambda_1 = 0, \ldots \lambda_{p-1} = 0, \lambda_p \neq 0)$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_{n_i^0} = 0 \iff \sum_{i=p}^{k} \lambda_i f_{n_i} = 0$$

$$\lambda_p e^{n_p x} + \lambda_{p+1} e^{n_{p+1} \cdot x} + \ldots \lambda_k e^{n_k x} = 0$$

$$e^{n_p x} \left(\lambda_p + \lambda_{p+1} e^{(n_{p+1} - n_p)x} + \ldots + \lambda_k e^{(n_k - n_p)x} \right) = 0$$

$p \neq 0$

$$\lambda_p + \lambda_{p+1} e^{(n_{p+1} - n_p)x} + \ldots + \lambda_k e^{(n_k - n_p)x} = 0$$

$x \longrightarrow -\infty$ $\qquad$ $x \to -\infty \Rightarrow 0$

Donc $\lambda_p = 0$ ce qui est absurde.

donc $\left(f_{n_i^0}\right)_{1 \leq i \leq k}$ est libre

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Par la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre

Ex n°2) : $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$

$P \to P + (1-X)P'$

(1) Pq f est linéaire.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q) + (1-X)(P+\lambda Q)'$$

$$= P + \lambda Q + (1-X)P' + \lambda Q'(1-X)$$

$$= P + (1-X)P' + \lambda\left(Q + (1-X)Q'\right)$$

$$= f(P) + \lambda f(Q)$$

D'où f est linéaire.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

(2) Base de $\ker f$ et Base $\operatorname{Im} f$

Soit $P \in \ker f$ donc $f(P) = 0$

$$\underline{P + (1-X)P' = 0}$$

1er $P = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

2ème Méthode $P + (1-X)P' = 0$

$y + (1-x)y' = 0$

$x < 1$.

$y' + \frac{1}{1-x} y = 0$.

$y = \lambda \cdot e^{-\text{Primitive}\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

$= \lambda e^{+\ln|1-x|} = \lambda |1-x|$

$(\ln(1-x))' = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$.

$(\ln(x-1))' = \frac{1}{x-1}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$P = \lambda(X-1)$.

• $P = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$.

$P' = 3a_3X^2 + 2a_2X + a_1$

$P + (1-X)P' = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$

$+ (1-X)(3a_3X^2 + 2a_2X + a_1) = 0$

$$\begin{cases} a_3 - 3a_3 = 0 \\ a_2 + 3a_3 - 2a_2 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_1 = 0 \\ a_0 + a_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_0 = -a_1 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$a_1 \in \mathbb{R}$ $P = a_1 X + a_0$.

$= a_1 x - a_1$.

$= a_1 (x-1)$

$P \in \text{Vect}(x-1)$.

$$\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(x-1)}$$

$\text{Im } f = \text{Vect}(f(\text{Base}))$

$= \text{Vect}(f(1), f(x), f(x^2), f(x))$

$f(P) = P + (1-x)P'$

$f(1) = 1 + (1-x)0 = 1$.

$f(x) = x + (1-x)1 = 1$.

$f(x^2) = x^2 + (1-x)2x = x^2 - 2x^2 + 2x$

$= 2x - x^2$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$f(x^3) = x^3 + (1-x)3x^2$$
$$= x^3 + 3x^2 - 3x^3$$
$$= 3x^2 - 2x^3$$

$$\text{Im } f = \text{vect}(1, 1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3)$$
$$= \underline{\text{vect}}\left(\underbrace{1}_{b_1}, \underbrace{2x - x^2}_{b_2}, \underbrace{3x^2 - 2x^3}_{b_3}\right)$$

on a $(1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3)$ st une famille à degré echelonné, donc la famille st libre

$$\dim \text{Im } f = 3 = \dim \mathbb{R}_3[x] - \dim \ker f$$
$$= 4 - 1 = 3.$$

$$\ker f = \text{vect}(x - 1)$$
$$\text{Im } f = \text{vect}(1, 2x - x^2, 3x^2 - 2x^3).$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On a d'après th du rg.

$$\dim \mathrm{Im} f + \dim \ker f = \dim \mathbb{R}_3[X]$$

donc pour démontrer que $\mathrm{Im} f \oplus \ker f = \mathbb{R}_3[X]$

il suffit de démontrer que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.

ou bien $\underline{\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}_3[X]}$.

$\ker f = \mathrm{vect}(X-1)$

$\mathrm{Im} f = \mathrm{vect}(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$

$\ker f + \mathrm{Im} f =$

$\mathrm{vect}(X-1) + \mathrm{vect}(1, 2X - X^2, 3X^2 - 2X^3)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$Vect(A) + Vect(B) = Vect(A \cup B)$.

$\ker f + \operatorname{Im} f = Vect(X-1, 1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3)$.

$\overset{1}{(X-1}, \overset{0}{1}, \overset{2}{2X-X^2}, \overset{3}{3X^2-2X^3})$

est libre, famille à degré échelonné

$\dim Vect(X-1, 1, 2X-X^2, 3X^2-2X^3)$

$= 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$

$\ker f + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$.

D'où $\ker(f) \oplus \operatorname{Im} f = \mathbb{R}_3[X]$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Ex N°3) $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

$F = \{ f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0 \}$

$G = \{ g \in E \mid g \text{ est linéaire} \}$

$H = \{ h \in E \mid h \text{ est constante} \}$

F, G, H des sev de E

Mq $E = F \oplus G \oplus H$

① $F \oplus G \oplus H$ ✓

② $E = F + G + H$

① Mq F, G, et H sont en somme directe

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Soit $(f,g,h) \in F \times G \times H$ tq

$f+g+h=0$ et $\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=0 \end{cases}$

$g \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ linéaire.

donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $g(x)=\lambda \cdot x$.

$\exists c \in \mathbb{R}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $h(x)=c$.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x)+g(x)+h(x)=0$

en particulier pour $x=0$

$$f(0)+g(0)+h(0)=0$$
$$0 \quad 0 \quad c$$

$\Rightarrow c=0 \Rightarrow h=0$

donc on obtient $f+g=0$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) + g(x) = 0$

donc $f'(x) + g'(x) = 0$

$f'(x) + \lambda = 0$

Pour $x = 0$ $\quad \underbrace{f'(0)}_{0} + \lambda = 0$

donc $\lambda = 0 \Rightarrow g = 0$

et finalement on a $f = 0$

1) D'où $F + G + H$ est directe.

2) On a $E = F + G + H$.

Soit $f \in E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f = \underbrace{f_1}_{=0} + \underbrace{g}_{-\lambda x} + \underbrace{h}_{=C}$.

$f(0) = f_1(0) + g(0) + h(0)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\boxed{c = f(0)} \Rightarrow h = f(0).$$

$$f' = f_1' + \underbrace{g'}_{\lambda} + \underbrace{h'}_{0}$$

$$f'(0) = \underbrace{f_1'(0)}_{0} + \underbrace{g'(0)}_{\lambda}$$

$$\boxed{\lambda = f'(0)} \Rightarrow g(x) = f'(0) \cdot x$$

$$f(x) = f_1(x) + \underbrace{f'(0) \cdot x}_{g} + \underbrace{f(0)}_{h}$$

$$f_1(x) = f(x) - f'(0) \cdot x - f(0)$$

$$f_1(0) = f(0) - f'(0) \times 0 - f(0) = 0$$

$$f_1'(0) = f'(0) - f'(0) = 0 \checkmark$$

$$f_1 = f(x) - f'(0) \cdot x - f(0) \in F$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

① On $f = \{f - f'(0).x - f(0)\}$

$+ f'(0).x + f(0)$

$\in F + G + H$

$E = F + G + H$

Donc $E = F \oplus G \oplus H$.

Ex6 : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$

H est un plan : $\dim H = 2$.

$D = vect\{(1,0,1)\} \Rightarrow \dim D = 1$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Aq $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$

ona $\dim H + \dim D = 2 + 1 = 3$.

$= \dim \mathbb{R}^3$ ✓

Pour démontrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus D$

il suffit de démontrer que

$H \cap D = \{0\}$ ✓ ou bien $v \notin H$

$v = (\underset{x}{1}, \underset{y}{0}, \underset{3}{1})$ $D = \text{vect}(v)$.

$1 + 0 + 1 \neq 0 \Rightarrow v \notin H$.

donc $H \oplus D = \mathbb{R}^3$ ✓.

(2) H et D sont stable par u.

$H = \{(x,y,3) \in \mathbb{R}^3 \mid \underset{0}{x} + \underset{1}{y} + \underset{-1}{3} = 0\}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$H = vect\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} ; \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{e_2} \right)$

Pour démontrer que H est stable par u :

$u(e_1) \in H$ et $u(e_2) \in H$

$\Rightarrow \forall x \in H \quad u(x) \in H$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{u} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -e_2$$

$0 + (-2) + 1 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in H$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = e_2 \in H.$$

Donc H est stable par u.

$D = vect\left(\underbrace{(1,0,1)}_{e_3} \right)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in D$$

Donc ① st stable par u.

(3) Base adaptée : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = B$

$$\underset{B}{Mat}(u) = \begin{array}{c} \begin{matrix} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix}$$

$u(e_1) = -e_2$; $u(e_2) = e_2$

$u(e_3) = 2e_3$

Ex n°8 dim $E = n$ E : $\mathbb{R}$-ev

$u \in \mathcal{L}(E)$ $rg(u) = 1$ B base de E

① $\Rightarrow \exists X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$u = X \cdot {}^tY$

On a $rg(u) = 1 \iff rg(Mat_B(u)) = 1$

$A = Mat_B(u) = (\underbrace{C_1, C_2, \quad , C_n}_{\neq 0})$

On a $rg(A) = 1$, $\exists i \in [\![1, n]\!]$

tq $C_i \neq 0$ et $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $j \neq i$

$\exists \alpha_j \in \mathbb{R}$ $\quad C_j = \alpha_j C_i$

Ex Pos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad rg(A) = 1.$$

$$Mat_B(u) = (\alpha_1 C_i, \alpha_2 C_i, \dots, \alpha_{i-1} C_i, \overset{\neq 0}{C_i}, \alpha_{i+1} C_i, \dots, \alpha_n C_i)$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\underset{B}{Mat}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_1 & \alpha_2 x_1 & \cdots & x_1 & \cdots & \alpha_n x_1 \\ \alpha_1 x_2 & \alpha_2 x_2 & & & & \alpha_n x_2 \\ & & & & & \\ \alpha_1 x_n & \alpha_2 x_n & & x_n & & \alpha_n x_n \end{pmatrix} \quad (C_i)$$

$$X = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_n \end{pmatrix} ; \quad Y = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$X \, {}^t Y = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & & b_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & & a_2 b_n \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & & a_3 b_n \\ \vdots & & & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & & a_n b_n \end{pmatrix}$$

$$X = C_i \; ; \quad Y = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_n \end{pmatrix} ; \quad \alpha_i = 1$$

$$\underset{B}{Mat}(u) = X . {}^t Y.$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

2

$$\underset{B}{Mat}(u^2) = \underset{B}{Mat}(u) \times \underset{B}{Mat}(u)$$

$$= X_{+y} \times X_{+y} = (\lambda_{+yX}) \times \underbrace{X_{+y}}_{Mat(u)_B}$$

$+yX \in \mathbb{R}$

$$\underset{B}{Mat}(u^2) = \lambda \cdot \underset{B}{Mat}(u)$$

$$tr(u) = tr\left(\underset{B}{Mat}(u)\right) = tr(X_{+y})$$

$$= tr(\underbrace{+y \cdot X}_{\text{scalaire}})$$

$$(tr(AB) = tr(BA)) \qquad = +y \cdot X$$

$$\underset{B}{Mat}(u^2) = \underbrace{tr(u)}_{+y \cdot X} \cdot \underset{B}{Mat}(u)$$

$$= \underset{B}{Mat}(tr(u) \cdot u)$$

$$\Rightarrow u^2 = tr(u) \cdot u .$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Ex 14 ① $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sev de $M_n(\mathbb{R})$

① $M_n S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$

on a $0 \in S_n(\mathbb{R})$ en effet

${}^t0 = 0$.

$I_n \in S_n(\mathbb{R})$, ${}^tI_n = I_n$

donc $S_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

Soit $A, B \in S_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

on a ${}^tA = A$ et ${}^tB = B$.

donc ${}^t(A + \lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB = A + \lambda B$.

① ' où $A + \lambda B \in S_n(\mathbb{R})$

donc $S_n(\mathbb{R})$ est un sev de $M_n(\mathbb{R})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

(b) Montrons que $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $M_n(\mathbb{R})$

On a $O \in A_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$

$${}^tO = -O$$

Soit $A, B \in A_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a ${}^tA = -A$ et ${}^tB = -B$

$${}^t(A+\lambda B) = {}^tA + \lambda\, {}^tB$$

$$= -A - \lambda B = -(A+\lambda B)$$

Donc $A + \lambda B \in A_n(\mathbb{R})$

D'où $A_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $M_n(\mathbb{R})$.

(2) Montrons que $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$

(a) Montrons que $M_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) + S_n(\mathbb{R})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{S} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{A}$$

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$$

On a ${}^tS = \frac{1}{2}{}^t(M + {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM))$

$$= \frac{1}{2}({}^tM + M) = S.$$

donc $S \in S_n(\mathbb{R})$

On a $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

$${}^tA = \frac{1}{2}{}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - M)$$

$$= -A.$$

$A \in A_n(\mathbb{R})$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

donc $M = S + A \in S_n(\mathbb{R}) + A_n(\mathbb{R})$

avec $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$.

(b) Mq $S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R}) = \{0\}$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R}) \cap A_n(\mathbb{R})$.

On a $\begin{cases} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{cases} \Rightarrow A = -A$

$\Rightarrow A = 0$

Donc $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

(3) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

On pose $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$

$$= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ \frac{-1}{2} & 0 & 1/2 \\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

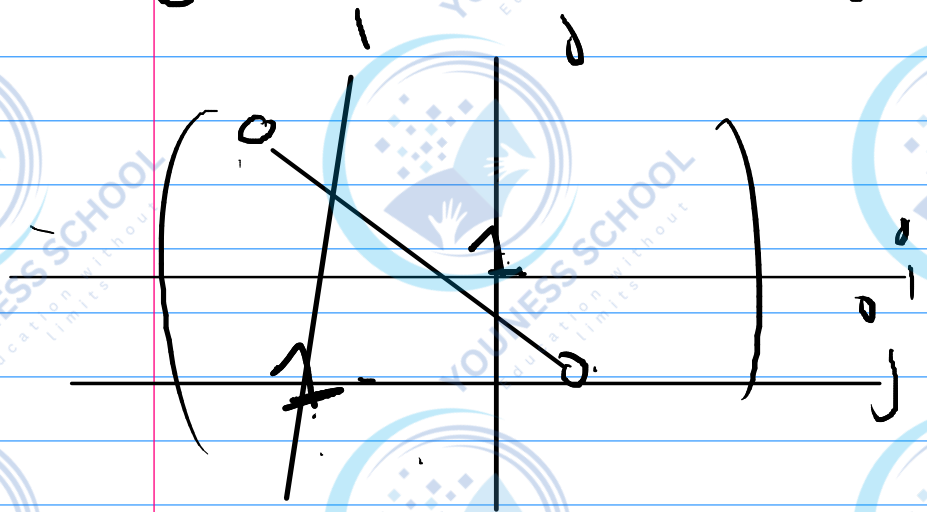
4) déterminer $\dim S_n$ et $\dim A_n$.

⇒ déterminer une base de S_n et A_n.

$(E_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ $\in M_n(\mathbb{R})$

$P_{ij} = E_{ij} + {}^t E_{ij} = E_{ij} + E_{ji}$ $i \neq j$

$i < j$



$E_{21} + E_{12}$

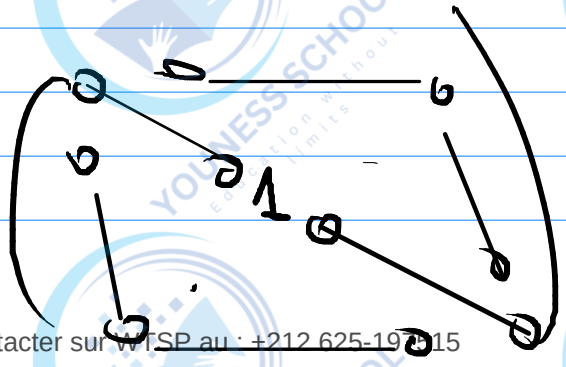
$i > j$

$j = 1, i = 2$

$E_{12} + E_{21}$

$(P_{ij})_{i<j}$

$P_{ii} = E_{ii} =$



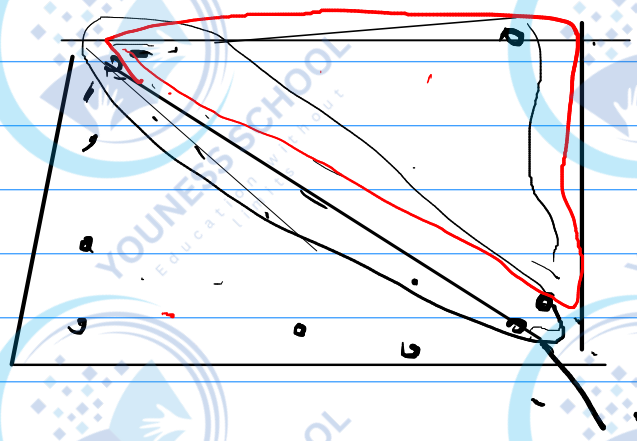
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$(P_{ij})_{i \leq j}$ est une base de $S_n(\mathbb{K})$

$\text{Card}\left((P_{ij})_{i \leq j}\right) =$

$n^2 =$



n

$$\frac{n^2 - n}{2} = \text{Card}\left((P_{ij})_{i<j}\right)$$

lorsque $i = j$ $\quad \text{Card}(P_{ii}) = n$

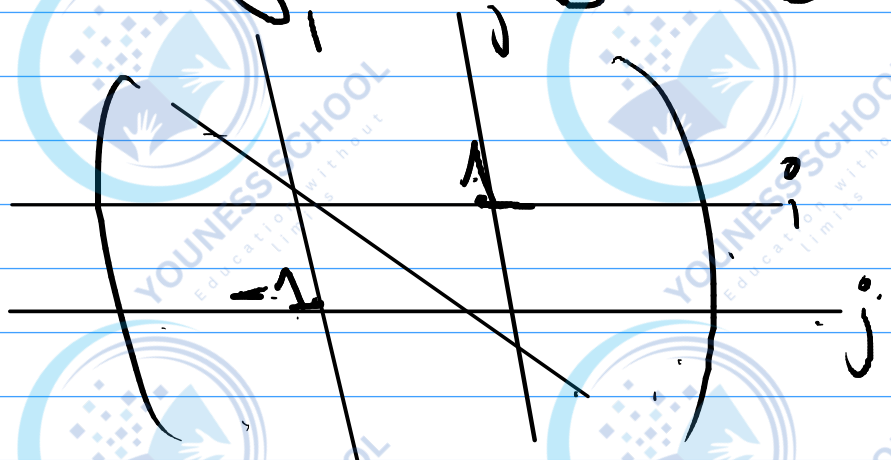
$$\text{Card}\left((P_{ij})_{i \leq j}\right) = n + \frac{n^2 - n}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} = \dim S_n(\mathbb{K})$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

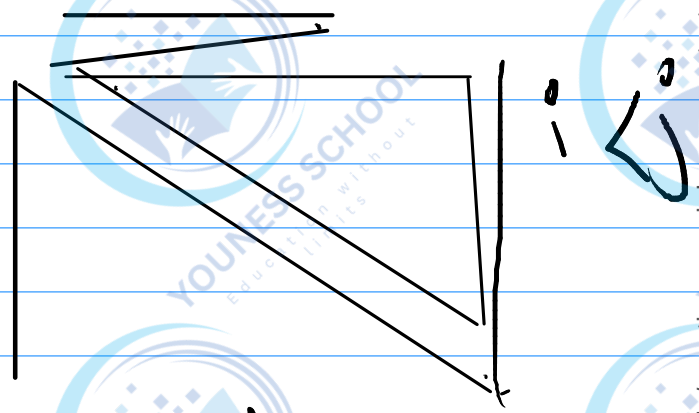
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$E_{ij} - {}^t E_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$



$\left(N_{ij} = E_{ij} - E_{ji} \right)_{i<j}$

$\text{card}(N_{ij}) =$



$= \frac{n(n-1)}{2} = \dim A_n(\mathbb{R})$

$\underline{A_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})}$

$n^2 = \dim A_n(\mathbb{R}) + \dim S_n(\mathbb{R})$ $= n^2$.

$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n}{2}(n-1+n+1)$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515