YOUNESS SCHOOL

Prepa Help

M04 Le symbole somme

Maths sup · Chapitre 3 · Calcul algébrique

Support de la capsule vidéo : les écrans de la capsule, scène par scène.

Cours complet et exercices corrigés : prepahelp.com

Une question ? Écris-nous sur WhatsApp

Document réservé aux inscrits de YOUNESS SCHOOL, ne pas diffuser.

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques

YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

Le symbole somme

Compter, découper, changer d'indice

MATHS SUP SOMMES ET PRODUITS

Une borne décalée : tout le calcul est faux

Le changement d'indice, en trois lignes

1 Notation et nombre de termes
2 La linéarité et les découpages
3 Un exemple traité en entier
4 Les quatre pièges

YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

LA NOTATION

Lire une somme

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

$$\sum_{k=3}^{2} a_k = 0 \qquad \prod_{k=3}^{2} a_k = 1$$

somme vide, produit vide

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

indice muet

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

NOMBRE DE TERMES

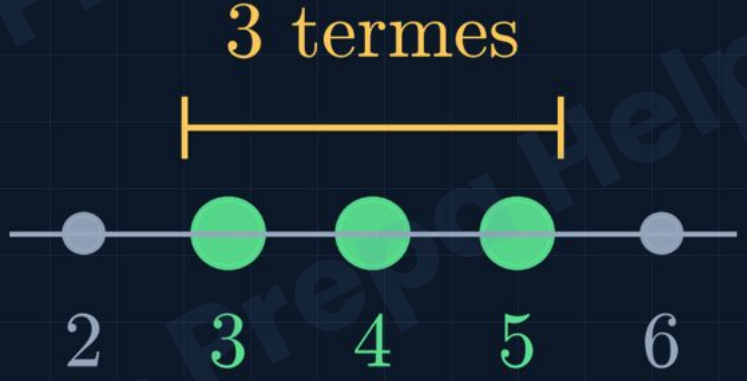
Compter les termes

$$\text{nombre de termes} = n - p + 1$$

$5 - 3 + 1 = 3$ 3, 4 et 5

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

$$\prod_{k=p}^{n} \lambda = \lambda^{n-p+1}$$



$$\sum_{k=3}^{5} a_k = a_3 + a_4 + a_5$$

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

LINÉARITÉ

Ce qui traverse le symbole Σ

1

La somme se coupe

$$\Sigma (a_i + b_i) = \Sigma a_i + \Sigma b_i$$

2

Une constante sort

$$\Sigma \lambda a_i = \lambda \Sigma a_i$$

3

Pas les produits

$\Sigma a_i b_i \neq (\Sigma a_i)(\Sigma b_i)$: avec $a = b = (1, 1)$, 2 d'un côté, 4 de l'autre.

YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

DÉCOUPER

Isoler un terme, couper en deux

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n$$

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k \qquad p \leq m < n$$

Retirer a_0 parce qu'il est nul : permis, mais il faut l'écrire.

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

MÉTHODE

Changer d'indice en trois lignes

1. Écrire la nouvelle lettre : $j = k + r$.
2. Traduire les bornes : quand k va de p à n, j va de $p + r$ à $n + r$.
3. Remplacer k par $j - r$ dans le terme général.
4. Renversement $j = n - k$: les bornes 0 et n s'échangent, l'indice k devient $n - j$.

YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

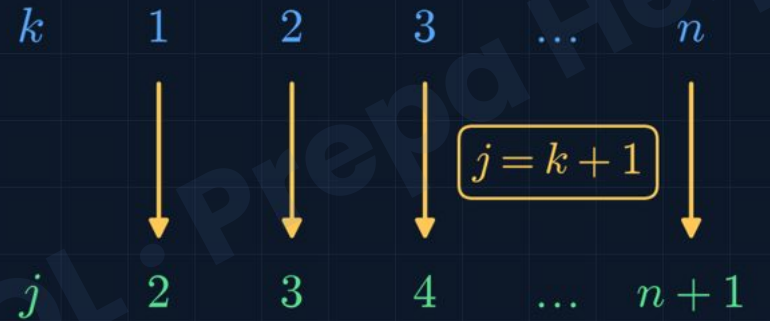
MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

EXEMPLES

Deux changements d'indice

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 = \sum_{j=2}^{n+1} j^2$$ j = k + 1

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k) = \sum_{j=0}^{n} j$$ j = n – k



À chaque k correspond un seul j, et inversement : c'est une bijection.

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

EXEMPLE

Simplifier une différence de sommes

$$S=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\sum_{j=2}^{n+1}j^2 \quad j = k + 1$$

$$\sum_{j=2}^{n+1}j^2=\sum_{j=1}^{n}j^2+(n+1)^2-1$$

$$S=(n+1)^2-1=n^2+2n \quad n = 1 : 4 - 1 = 3$$

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

TROIS PIÈGES CLASSIQUES

PIÈGE 1

~~« Σ de k = 0 à n de 1 vaut n »~~

JUSTE

De 0 à n, il y a n + 1 entiers : la somme vaut n + 1.

PIÈGE 2

~~« Σ k · 2^k = k · Σ 2^k »~~

JUSTE

Seules les quantités sans k sortent : n, x, une constante. L'indice, jamais.

PIÈGE 3

~~« Σ de k = 1 à n de a_{k+1} = Σ de k = 2 à n + 1 de a_{k+1} »~~

JUSTE

Avec j = k + 1 : Σ de j = 2 à n + 1 de a_j. Bornes et terme changent ensemble.

MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

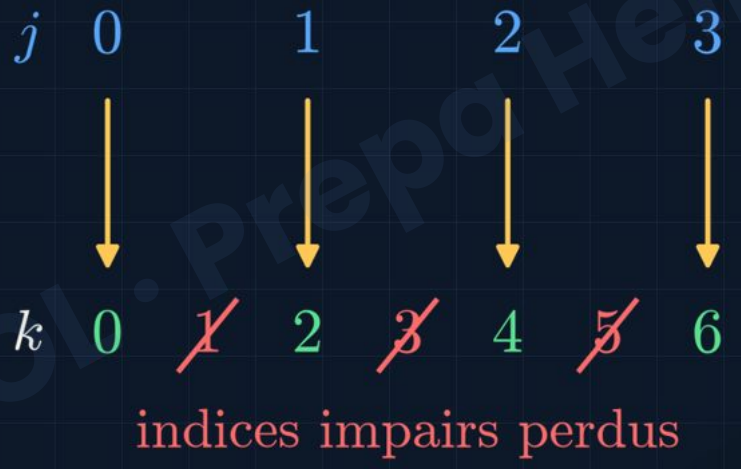
LE PIÈGE DES JURYS

Une bijection, rien d'autre

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{2j}$$ faux

k = 2j ne parcourt que les indices pairs : la moitié des termes est perdue.

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k = \sum_{j=0}^{n} a_{2j} + \sum_{j=0}^{n-1} a_{2j+1}$$



MATHS SUP Sommes et produits · M04 Le symbole somme · prépas scientifiques YOUNESS SCHOOL · Prepa Help

LE CHAPITRE COMPLET

Le symbole somme en résumé

- n − p + 1 termes
- Seule la linéarité traverse Σ
- Bornes et terme changés ensemble
- Un changement d'indice est une bijection

Cours, méthodes, exercices corrigés

Prepa Help

prepahelp.com

Écris toujours la nouvelle lettre et ses bornes.

YOUNESS SCHOOL · Prepa Help