Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

CPGE : MARRAKECH
Filière : MPSI-PCSI-TSI1

Année scolaire : 2024-2025
prof :Mouad NASRI

Révision générale : Logiques-Raisonnements, nombres complexes et calculs algébriques, ensembles-applications

Logique-Raisonnements :

Exercice. 1

Écrire la négation des propositions suivantes .

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \in \mathbb{N}, \quad m$ *divise* n.
2. $\exists m \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m$ *divise* n.
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \quad \exists (u,v) \in \mathbb{Z}^2, \quad au + bv = 1$.
4. $\exists a \in \mathbb{R}, \quad \forall \epsilon > 0, \quad |a| \leq \epsilon$.
5. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists a \in \mathbb{R}, \quad |a| \leq \epsilon$.
6. $\forall M > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad 2^n \geq M$.

Exercice. 2

Écrire au moyen des quantificateurs les propositions suivantes en donnant leurs négations :

1. Soit (u_n) une suite numérique.
   (a) (u_n) est bornée.
   (b) (u_n) est croissante.
   (c) (u_n) est monotone.
2. f est une application du plan dans lui même.
3. f est l'identité du plan.
4. Soit f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) f admet au moins un point fixe.
   (b) f est l'application nulle.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice. 3

1. Montrer qu'il n'existe pas d'entier naturel supérieure à tout autre.
2. Soit a un réel.Démontrer l'implication :
$$\forall \epsilon > 0, \mid a \mid < \epsilon \Rightarrow a = 0$$
3. Montrer que $\dfrac{ln(2)}{ln(3)} \notin \mathbb{Q}$.
4. Montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice. 4

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \geq n$.

Exercice. 5

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$
on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$
(La formule du binôme de Newton)

Exercice. 6

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

1. Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
   Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 + 2^n$.
2. On pose $F_0 = F_1 = 1$ et pour $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n \geq 0$.

Exercice. 7

On pose $u_1 = 3$ et pour $n \geq 1$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_n = 3n$.(utiliser la récurrence forte)

Exercice. 8

Calculer les sommes et produits suivantes :

$1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1)$; $2)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2k+1)$; $3)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2^k + 4k + n - 3)$

$4)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{2^{2k-1}}$; $5)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln(1+\frac{1}{k})$; $6)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

$7)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k k$; $8)\displaystyle\prod_{k=0}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}$; $9)\displaystyle\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$.

Exercice. 9

(**Raisonnement analyse synthèse :**)

Déterminer les applications f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad f(m+n) = f(n) + f(m)$$

.

Exercice. 10

Calculer les sommes suivantes :

$1)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$; $2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$; $3)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice. 11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. En déduire la valeur de S_n.

Exercice. 12

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ka^k$.

1. Calculer S_n lorsque $a = 1$.
2. Lorsque $a \neq 1$, calculer $aS_n - S_n$ et en déduire la valeur de S_n.

Exercice. 13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{2n}{2k+1}$.

1. Écrire $z = (1+i)^{2n}$ sous forme trigonométrique.
2. En déduire la valeur des sommes S_n et T_n.

Exercice. 14

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

1. On note : $\forall x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx}$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S_n(x) = 2^n (cos(\frac{x}{2}))^n e^{\frac{inx}{2}} - 1.$$

et donner une valeur exacte de $S_n(\frac{2p\pi}{n})$.

2. En déduire, pour tout réel x, les sommes suivantes :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} sin(kx) \ \ et \ \ K_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos(kx).$$

Exercice. 15

(**Banque CCP 89**)

Soit $n \in \mathbf{N}$, avec $n \geqslant 2$ et soit $\omega = e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

1. On suppose que $k \in [\![1, n-1]\!]$. Déterminer le module et un argument du complexe $\omega^k - 1$.
2. On pose $S = \sum_{k=1}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan \frac{\pi}{2n}}$.

Exercice. 16

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2, on note pour tout complexe z :

$$\mathrm{S}_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(z + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n$$

1) Rappeler la formule du binôme de Newton.

2) Démontrer que $\mathrm{S}_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{p} z^{n-p} e^{\frac{2ikp\pi}{n}} \right)$.

3) En déduire la relation (R) : $\mathrm{S}_n(z) = n\,(z^n + 1)$.

Exercice. 17

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)x^2}{2}$.

Exercice. 18

Calculer les sommes suivantes :

1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$; 2) $\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$

Exercice. 19

Donner la limite S de la suite $(S_n)_n$, définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^n$.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515