Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

dimanche 26 octobre 2025 13:35

Exercice 1 :

1/ éq de l'hydrostatique : $\overrightarrow{grad}\, P = \rho \vec{g}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z} = -\rho g \vec{e_z}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P \text{ ne dépend ni de } x \text{ ni de } y \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow P \text{ dépend de } z \end{cases}$$

2/ On a $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow dP = -\rho g\, dz$

$\Rightarrow P_1(z) = -\int \rho g\, dz = -\rho g \int dz$

$\Rightarrow P_1(z) = -\rho g z + cte$

$P_1(z = H) = P_0 = -\rho g H + cte \Rightarrow cte = P_0 + \rho g H$

$$\Rightarrow \boxed{P_1(z) = \rho g (H - z) + P_0}$$

3/ $P_2(z) = -\rho g z + cte$

$P_2(z = h) = P_0 = -\rho g h + cte \Rightarrow cte = P_0 + \rho g h$

$$P_2(z) = \rho g (h - z) + P_0$$

4/ $\overrightarrow{dF_1} = P_1(z)\, dS\, \vec{e_x}$

$\overrightarrow{dF_1} = (P_0 + \rho g(H - z))\, dz . L\, \vec{e_x}$

$\overrightarrow{F_1} = \int_0^H L\,(P_0 + \rho g (H - z))\, dz\, \vec{e_x}$

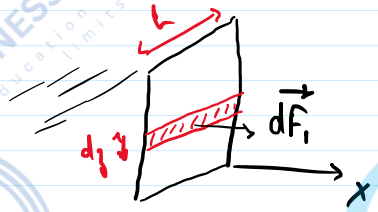
$= (L P_0 + \rho g H) . [z]_0^H - L\rho g \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^H \vec{e_x}$

$= (L P_0 + L\rho g H) H - L\rho g \frac{H^2}{2} \vec{e_x}$

$= L P_0 H + L\rho g H^2 - L\rho g \frac{H^2}{2} \vec{e_x}$

$= L P_0 H + L \rho g \frac{H^2}{2} \vec{e_x}$

$\overrightarrow{F_1} = LH\left(P_0 + \rho g \frac{H}{2}\right) \vec{e_x}$

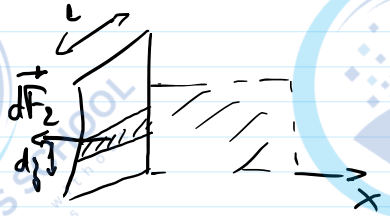


5/ $\overrightarrow{dF_2} = -P_2(z) . dS\, \vec{e_x}$

$\overrightarrow{dF_2} = -(P_0 + \rho g(h - z))\, L\, dz\, \vec{e_x}$

$\overrightarrow{F_2} = -\int_0^h (P_0 + \rho g (h - z))\, L\, dz\, \vec{e_x}$

dem $\overrightarrow{F_2} = -Lh\left(P_0 + \rho g \frac{h}{2}\right) \vec{e_x}$



6/ $\overrightarrow{dF_{air}} = -P_0\, dS\, \vec{e_x} = -P_0 L\, dz\, \vec{e_x}$



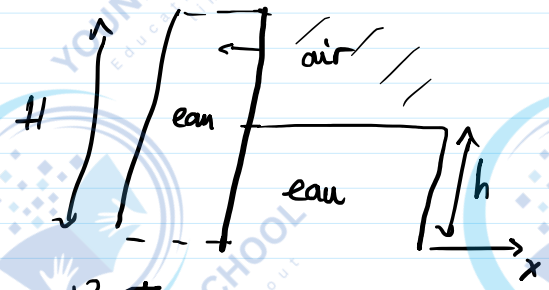
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

6/ $\vec{dF}_{air} = -P_0\, dS\, \vec{e_x} = -P_0 L\, dz\, \vec{e_x}$

$\vec{F}_{air} = -P_0 L \int_h^H dz\, \vec{e_x}$

$\vec{F}_{air} = -P_0 L (H-h)\, \vec{e_x}$



7/ $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_{air}}$

$= \left\{ LH\left(P_0 + \rho g \frac{H}{2}\right) - Lh\left(P_0 + \rho g \frac{h}{2}\right) - P_0 L (H-h) \right\} \vec{e_x}$

$= \left[L\rho g \frac{H^2}{2} - L\rho g \frac{h^2}{2} \right] \vec{e_x}$

$\vec{R} = \frac{\rho g L}{2} (H^2 - h^2)\, \vec{e_x}$

8/ $\star\ d\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_1}) = \vec{OM} \wedge \vec{dF_1}$ $\quad M \in dS$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_1}) = \int_0^H \vec{OM} \wedge \vec{dF_1}$

$= \int_0^H (z\vec{e_z}) \wedge P_1(z) L\, dz\, \vec{e_x}$

$= \int_0^H z\,(P_0 + \rho g (H-z)) L\, dz\, \vec{e_y}$

$= L \int_0^H \left((P_0 + \rho g H) z - \rho g z^2 \right) dz\, \vec{e_y}$

$= L \left[(P_0 + \rho g H) \frac{H^2}{2} - \rho g \frac{H^3}{3} \right] \vec{e_y}$

$= L \left[P_0 \frac{H^2}{2} + \rho g \left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^3}{3} \right) \right] \vec{e_y}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_1}) = L \left[P_0 \frac{H^2}{2} + \rho g \frac{H^3}{6} \right] \vec{e_y}$

$\star\ d\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_2}) = \vec{OM} \wedge \vec{dF_2} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_2}) = \int_0^h \vec{OM} \wedge \vec{dF_2}$

$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_2}) = -\int_0^h z\vec{e_z} \wedge P_2(z) L\, dz\, \vec{e_x}$

$= -L \int_0^h z\,(P_0 + \rho g (h-z))\, dz\, \vec{e_y}$

de même $\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_2}) = -L \left(P_0 \frac{h^2}{2} + \rho g \frac{h^3}{6} \right) \vec{e_y}$

$\star\ d\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_{air}}) = \vec{OM} \wedge \vec{dF_{air}} = -\vec{OM} \wedge P_0\, dz\, L\, \vec{e_x}$

$\vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F_{air}}) = -\int_h^H z\vec{e_z} \wedge P_0\, dz L\, \vec{e_x}$

$= -LP_0 \int_h^H z\, dz\, \vec{e_y}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$= -LP_0\left(\frac{H^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right)\vec{e_y}$$

$$\vec{M_0}(\vec{F_{air}}) = \frac{LP_0}{2}(h^2 - H^2)\vec{e_y}$$

$$\vec{M_0} = \vec{M_0}(\vec{F_1}) + \vec{M_0}(\vec{F_2}) + \vec{M_0}(\vec{F_{air}})$$

$$= \left\{ L\left[P_0\frac{H^2}{2} + \rho g\frac{H^3}{6}\right] - L\left[P_0\frac{h^2}{2} + \rho g\frac{h^3}{6}\right] + \frac{LP_0}{2}(h^2 - H^2) \right\}\vec{e_y}$$

$$\vec{M_0} = \frac{L\rho g}{6}(H^3 - h^3)\vec{e_y}$$

9/ $\vec{M_0} = \vec{OC} \wedge \vec{R} = (y_C\vec{e_y} + z_C\vec{e_z}) \wedge \frac{\rho g L}{2}(H^2 - h^2)\vec{e_x} = \frac{L\rho g}{6}(H^3 - h^3)\vec{e_y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_C \frac{\rho g L}{2}(H^2 - h^2) = 0 \Rightarrow y_C = 0 \\ z_C \frac{\rho g L}{2}(H^2 - h^2) = \frac{L\rho g}{6}(H^3 - h^3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_C = 0 \quad \text{et} \quad z_C = \frac{H^3 - h^3}{3(H^2 - h^2)}$$

10/ A.N

Exercice2 :

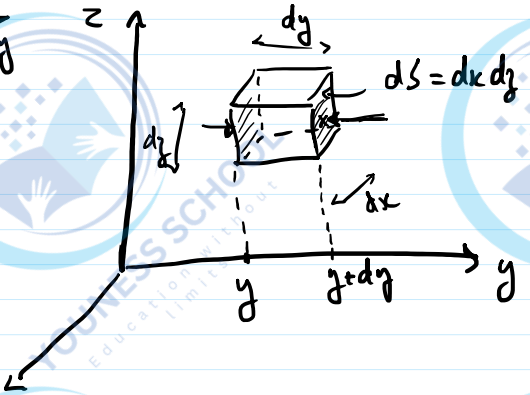
1/ $[P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{[m\vec{a}]}{[S]} = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$

2/ $d\vec{F}_y = -P(y+dy)\,dx\,dz\,\vec{e_y} + P(y)\,dx\,dz\,\vec{e_y}$

$$= -\left(P(y+dy) - P(y)\right)dx\,dz\,\vec{e_y}$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}dy\,dx\,dz\,\vec{e_y}$$

$$d\vec{F}_y = -\frac{\partial P}{\partial y}dV\,\vec{e_y}$$



de même $d\vec{F}_x = -\frac{\partial P}{\partial x}dV\,\vec{e_x}$ et $d\vec{F}_z = -\frac{\partial P}{\partial z}dV\vec{e_z}$

$$\Rightarrow d\vec{F}_p = d\vec{F}_x + d\vec{F}_y + d\vec{F}_z$$

$$= -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{e_x} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{e_y} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{e_z}\right)dV$$

$$d\vec{F}_p = -\vec{grad}P\,dV$$

particule en équilibre : PFD $\Rightarrow \vec{0} = d\vec{F}_p + d\vec{P}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

particule en équilibre : PFD $\Rightarrow$ $\vec{0} = d\vec{f}_p + d\vec{P}$

$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}P\,dV + \underbrace{\mu_f dV}_{\text{masse}}\vec{g}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}P = \mu_f \vec{g}$ éq de l'hydrostatique

3/ $\overrightarrow{\text{grad}}P = \mu_f \vec{g} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = -\mu_f g$ (projection sur $\vec{u}_z$)

$/\vec{u}_x\,dx\,/\vec{u}_y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dz} = -\mu_f g$

$\Rightarrow dP = -\mu_f g\,dz$

surface équi-pression $\Rightarrow dP = 0 \Rightarrow dz = 0$

$P = cte \Rightarrow z = cte$

4/ $dP = -\mu_f g\,dz \Rightarrow P = -\mu_f g z + cte$

$P(z = h_f) = P_0 \Rightarrow P(z = h_f) = P_0 = -\mu_f g h_f + cte$

$\Rightarrow cte = P_0 + \mu_f g h_f$

$\Rightarrow P(z) = P_0 + \mu_f g (h_f - z)$ →

5/ 5.1/ $dP = -\mu_f g\,dz = -\mu_0 (1 + \alpha(P - P_0)) g\,dz$ ⊛

posons $P' = \mu_0 g (1 + \alpha(P - P_0)) \Rightarrow dP' = \alpha \mu_0 g\,dP$

⊛ $\Rightarrow \frac{dP'}{\mu_0 \alpha g} = -P'\,dz$

$\Rightarrow \frac{dP'}{P'} = -\mu_0 \alpha g\,dz$

$\Rightarrow \int \frac{dP'}{P'} = \int -\mu_0 \alpha g\,dz \Rightarrow \ln P' = -\mu_0 \alpha g z + cte$

$\Rightarrow P' = \underbrace{A}_{\text{constante}} e^{-\mu_0 \alpha g z}$

$\Rightarrow \mu_0 g (1 + \alpha(P - P_0)) = A e^{-\mu_0 \alpha g z}$

$\Rightarrow \mu_0 g \alpha P = A e^{-\mu_0 \alpha g z} - \mu_0 g + \mu_0 g \alpha P_0$

$\Rightarrow P = P_0 - \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\mu_0 g \alpha} e^{-\mu_0 \alpha g z}$

$P(z = h_f) = P_0 = P_0 - \frac{1}{\alpha} + \frac{A}{\mu_0 g \alpha} e^{-\mu_0 \alpha g h_f}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$\Rightarrow A e^{-\mu_0 g \alpha h_6} = \mu_0 g$

$\Rightarrow A = \mu_0 g e^{\mu_0 g \alpha h_6}$

$\Rightarrow P(z) = P_0 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{-\mu_0 g \alpha (z - h_6)}$

$P(z) = P_0 + \frac{e^{-\mu_0 g \alpha (z-h_6)} - 1}{\alpha}$

5.2/ profondeur faible $\Rightarrow z - h_6$ faible

$e^x \underset{x \to 0}{\simeq} 1 + x \quad \Rightarrow \quad e^{-\mu_0 g \alpha (z-h_6)} = 1 - \mu_0 g \alpha (z - h_6)$

$P(z) = P_0 + \frac{1 - \mu_0 g \alpha (z-h_6) - 1}{\alpha}$

$P(z) = P_0 - \mu_0 g (z - h_6) = P_0 + \mu_0 g (h_6 - z)$

5.3/

5.4/ $\varepsilon = \frac{P_{exacte} - P_{approchée}}{P_{exacte}}$

Exercice 3 :

Rappel :

écoulement stationnaire $\Rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$

écoulement incompressible $\Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$

$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{si } \rho = cte \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 \right)$

écoulement irrotationnel $\Rightarrow \vec{rot}\, \vec{v} = \vec{0}$

ligne de champ $\Rightarrow d\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

1/ $\vec{v} = v_0 \vec{u_z}$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow$ écoulement stationnaire

$\operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0 \Rightarrow$ écoulement est incompressible

$\vec{rot}\, \vec{v} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{vmatrix} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \vec{e_x} - \frac{\partial v_0}{\partial x} \vec{e_y} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ écoulement irrotationnel

trajectoire : $\frac{dx}{dt} = 0$ et $\frac{dy}{dt} = 0$ et $\frac{dz}{dt} = v_0$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$x = x_0$ et $y = y_0$ et $z = v_0 t + z_0$

b) lignes de champ :

$$d\vec{OM} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} + & dx & v \\ - & dy & 0 \\ + & dz & v_0 \end{vmatrix} = v_0\, dy\, \vec{e_x} - v_0\, dx\, \vec{e_y} = \vec{0}$$

$\Rightarrow dx = dy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = x_0$ et $y = y_0$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515