Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

dimanche 26 octobre 2025 13:34

## Exercice 1 :

1.1/ Un Sys est dite linéaire si on a pas naissance d'autres harmonique.
" " " " si il est régit par une éq diff à coeff constante

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \checkmark$$

(a,b ne dépend pas de x) $a\frac{d^2x}{dt^2} + 2t\frac{dx}{dt} + bx = 0$ ✓

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2x\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \times$$

1.2.1/ Le tracé d'amplitude en fonction de fréquence

1.2.2/ Oui il est linéaire, c'est un filtre passe-bas

1.2.3/ Système 2 : Oui linéaire, c'est un filtre passe-bande
Système 3 : Non c'est pas linéaire.

Exercice 2 : Décomposition en série de Fourier :

Si $s(t)$ est périodique $\Rightarrow$ $s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$

$\omega$ la pulsation de $s(t)$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\,dt$ ; $a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\cos(n\omega t)\,dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} s(t)\sin(n\omega t)\,dt$

$a_0$ ↓ valeur moyenne

On peut m'écrire $s(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$

$a_0 = c_0$ $\quad a_n = c_n \cos\varphi_n$ $\quad b_n = -c_n \sin(\varphi_n)$

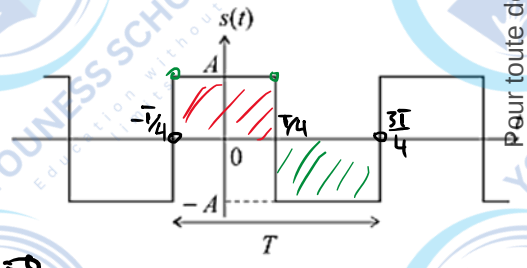
$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\quad \tan\varphi_n = -\frac{b_n}{a_n}$

Revenons :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} s(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\,dt + \frac{1}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} -A\,dt$$

$$= \frac{1}{T} \times A \times \frac{T}{2} - \frac{A}{T}\frac{T}{2}$$

$$a_0 = 0$$




Or $s(t) = s(-t)$ $\Rightarrow$ $s(t)$ est pair $\Rightarrow$ $b_n = 0$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} s(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{2}{T}\left[\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} -A\cos(n\omega t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2A}{T}\left[\frac{1}{n\omega}\left(\sin\left(n\omega\frac{T}{4}\right) + \sin\left(n\omega\frac{T}{4}\right)\right) - \frac{1}{n\omega}\left(\sin\left(n\omega\frac{3T}{4}\right) - \sin\left(n\omega\frac{T}{4}\right)\right)\right]$$

$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_n = \frac{2A}{T}\cdot\frac{T}{2n\pi}\left[2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(n\times\frac{2\pi}{T}\times\frac{3T}{4}\right) - \sin\left(n\times\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right)\right)\right]$$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

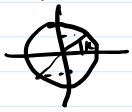
$$a_n = \frac{2A}{T}\cdot\frac{1}{2n\pi}\left[2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \left(\sin\left(n\times\frac{2\pi}{T}\times\frac{5T}{4}\right) - \sin\left(n\times\frac{2\pi}{T}\times\frac{T}{4}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left[2\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{3n\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{A}{n\pi}\left[3\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(n\pi + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$\sin(x+\pi) = -\sin x$

$\sin(x+2\pi) = \sin(x)$



Si $n = 2k$ (paire) : $a_n = 0$

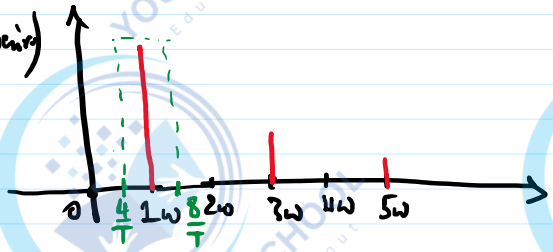
$n = 2k+1$ (impaire) : $a_n = \frac{4A}{n\pi}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$

2.2/ $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{4A}{n\pi}$ ($n$ impaire)

$\varphi_n = \text{Arctan}\left(-\frac{b_n}{a_n}\right) = 0$

$c_0 = a_0 = 0$

$c_n = 0$ $n$ pair

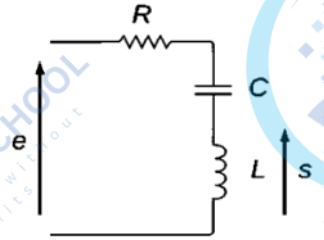


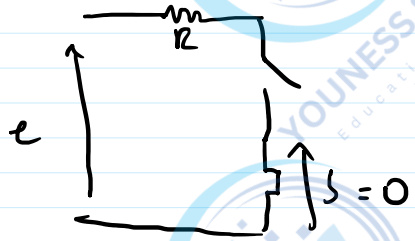

2.3/ $\frac{4}{T} = \frac{4\omega}{2\pi} = \frac{2\omega}{\pi} =$ $\frac{8}{T} = \frac{8\omega}{2\pi} = \frac{4\omega}{\pi}$

## Exercice 3 :

3.1/ bobine : $Z_L = jL\omega$ condensateur : $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$

THF : $\omega \to 0 \Rightarrow$  et 




3.2/ THF : $\omega \to +\infty \Rightarrow$  et 




$s(t) + 0 + Ri - e(t) = 0$

$s(t) = e - Ri$ (interrupteur ouvert)

$s(t) = e(t)$

3.3/ notre filtre laisse passe les hauts fréq et coupe les basses fréq donc c'est un filtre passe Haut

3.4/ $\underline{s} = \frac{Z_L}{Z_L + Z_C + R}\underline{e} \Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

$$\underline{s} = \frac{\dots}{Z_L + Z_C + R}\,\underline{e} \Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\dots}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega} + R}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow LC = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \underline{H} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jRC\omega_0\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

3.5/ $G_{dB} = 20\log|\underline{H}| = 20\log\left(\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}\right)$

$$= 20\log(x^2) - 20\log\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

$$G_{dB} = 40\log x - 10\log\left((1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$$

TBF: $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow G_{dB_1}^* = 40\log x - 10\log\left(1 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$

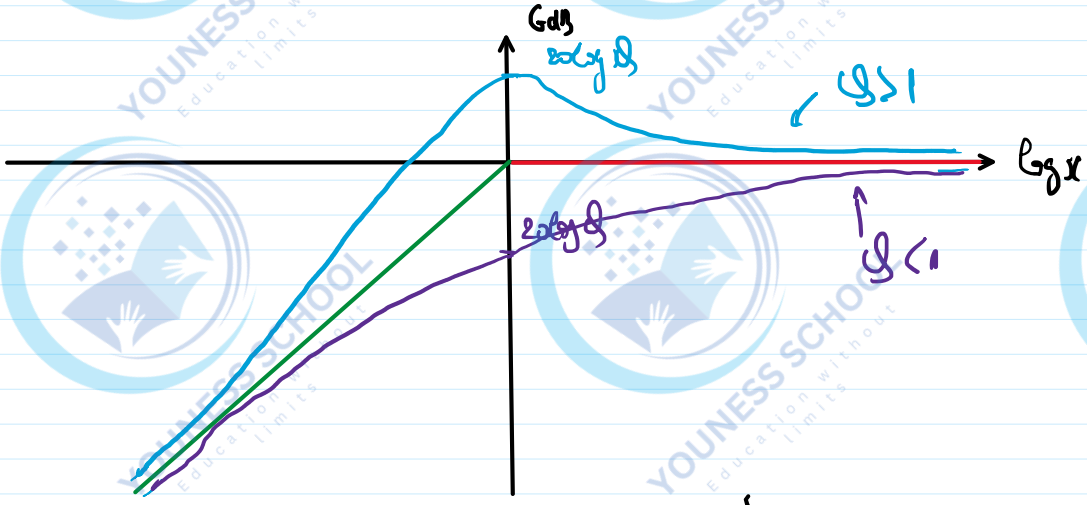
$\Rightarrow \boxed{G_{dB_1}^* = 40\log x}$ pente 40 dB/décade

THF: $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow G_{dB_2}^* = 40\log x - 10\log\left(x^4 + \frac{x^2}{Q^2}\right)$

$\Rightarrow G_{dB_2}^* = 40\log x - 10\log(x^4)$

$\Rightarrow G_{dB_2}^* = 0$

$x = 1$ $(\omega = \omega_0) \Rightarrow G_{dB}(x=1) = 20\log Q$




3.6/ $\varphi = \text{Arg}(\underline{H}) = \text{Arg}\left(\frac{-x^2}{(1-x^2) + j\frac{x}{Q}}\right)$

Rappel: $z = a + jb$

si $a > 0 \Rightarrow \text{Arg}\, z = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right)$

si $a < 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi$

si $b > 0 \Rightarrow \text{Arg}\, z = \text{Arctan}\left|\frac{b}{\dots}\right| + \pi$

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

si $a<0 \Rightarrow \text{Arg}(z) = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) \pm \pi$

si $b>0 \Rightarrow \text{Arg}\, z = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$

si $b<0 \Rightarrow \text{Arg}\, z = \text{Arctan}\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$

$$\varphi = \text{Arg}(-x^2) - \text{Arg}\left(1-x^2 + j\frac{x}{Q}\right)$$

$$= \pi - \text{Arg}\left(j\left(\frac{x}{Q} + j(x^2-1)\right)\right)$$

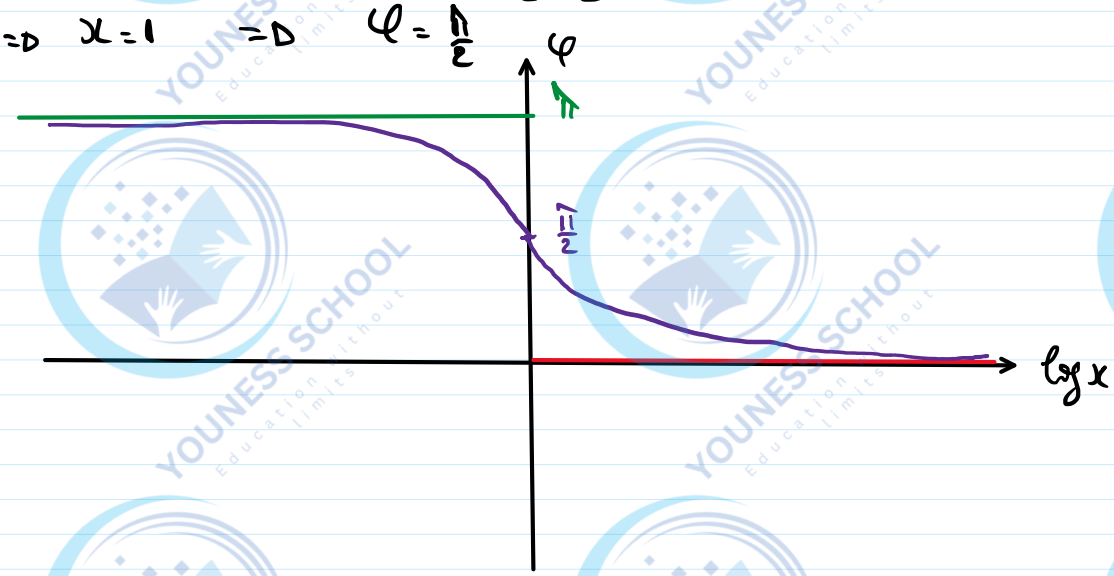
$$= \pi - \text{Arg}\, j - \text{Arg}\left(\frac{x}{Q} + j(x^2-1)\right)$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\left(Q\frac{x^2-1}{x}\right)$$

BF : $\omega \to 0^+ \Rightarrow x \to 0^+ \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ ←

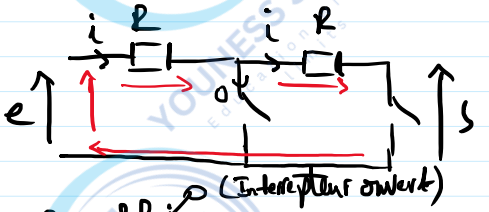
HF : $\omega \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ ←

$\omega = \omega_0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$

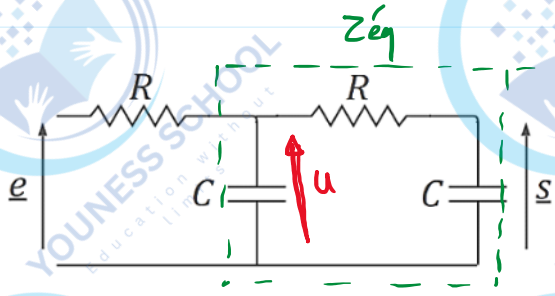



Exercice 4 :

1/ BF : $\omega \to 0 \Rightarrow$




$s = e - 2Ri \Rightarrow$ $\boxed{s = e}$ $\omega \to 0$




THF : $\omega \to +\infty \Rightarrow$

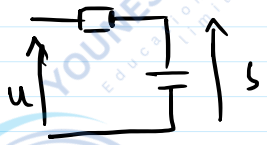



Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

2/

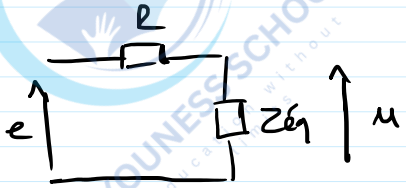
$$\underline{s} = \frac{Z_c}{R+Z_c}\underline{u} = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega}\underline{u}$$




$$\underline{s} = \frac{1}{1+jRC\omega}\underline{u}$$

$Z_{éq} = C // (R+C)$

$$\frac{1}{Z_{éq}} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R+Z_c}$$




$$\underline{u} = \frac{Z_{éq}}{R+Z_{éq}}\underline{e} = \frac{1}{1+\frac{R}{Z_{éq}}}\underline{e}$$

$$\underline{u} = \frac{1}{1+R\left(\frac{1}{Z_c}+\frac{1}{R+Z_c}\right)}\underline{e} \Rightarrow \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+jRC\omega} \times \frac{1}{1+R\left(jC\omega+\frac{1}{R+1/jC\omega}\right)}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+jRC\omega} \times \frac{1}{(1+jRC\omega)+\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}}$$

$$= \frac{1}{(1+jRC\omega)^2+jRC\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1-(RC\omega)^2+3jRC\omega} \qquad x = RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

3/ $G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\left|\frac{1}{1-x^2+3jx}\right|\right)$

$$= 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}}\right)$$

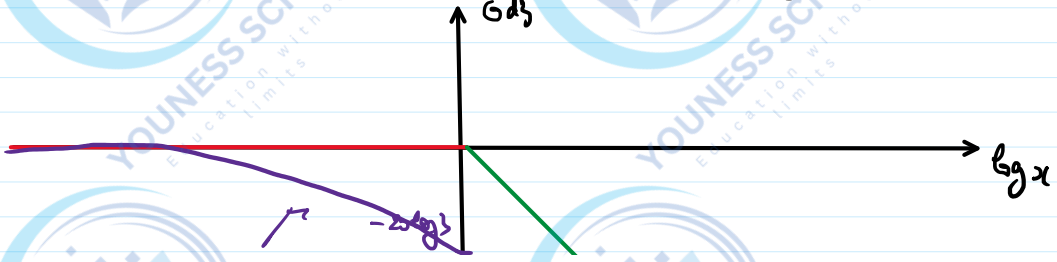
$$= -20\log\left(\sqrt{(1-x^2)^2+9x^2}\right)$$

$$G_{dB} = -10\log\left((1-x^2)^2+9x^2\right)$$

TBF : $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow x \ll 1 \Rightarrow G_{dB_1}^{*} = -10\log(1+9x^2) = 0$

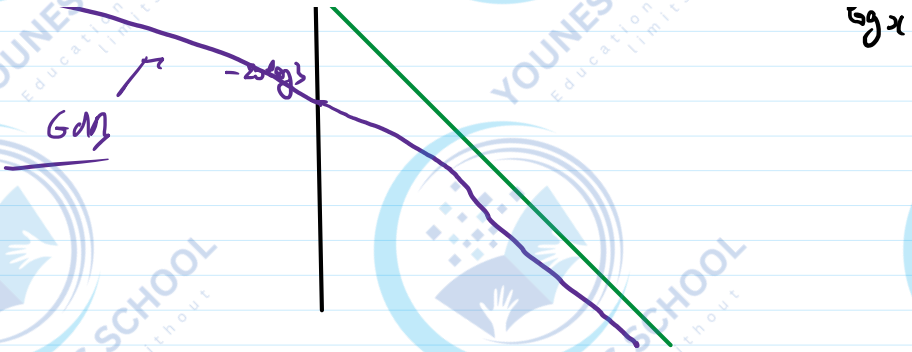
THF : $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow x \gg 1 \Rightarrow G_{dB_2}^{*} = -10\log(x^4+9x^2) = -10\log(x^4) = -40\log x$

$\omega = \omega_0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow G_{dB}(x=1) = -10\log(9) = -20\log(3)$




Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515




$$\varphi = \operatorname{Arg} \underline{H} = \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{1-x^2+3jx}\right) = -\operatorname{Arg}\left(1-x^2+3jx\right)$$

$$= -\operatorname{Arg}\left(j\left(3x+j(x^2-1)\right)\right)$$

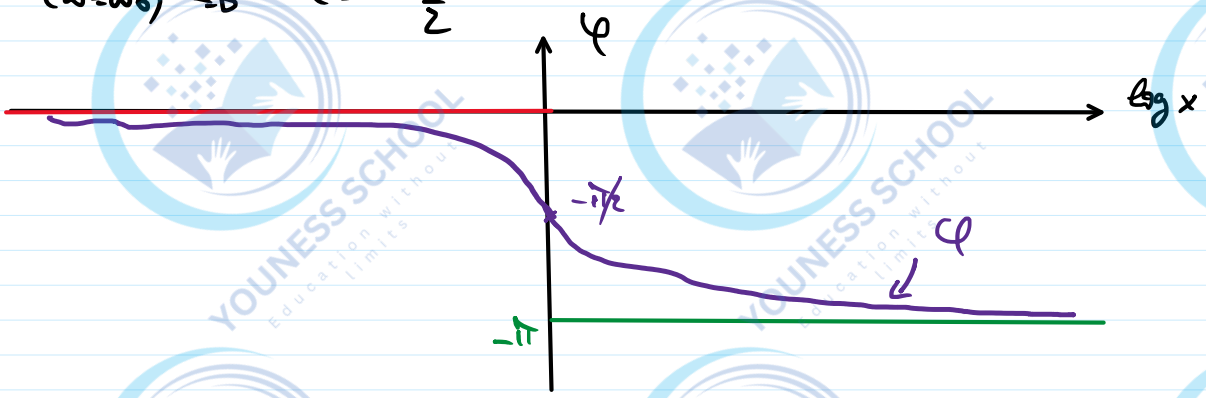
$$= -\operatorname{Arg} j - \operatorname{Arg}\left(3x+j(x^2-1)\right)$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{x^2-1}{3x}\right)$$

TBF : $\omega \to 0 \Rightarrow x \to 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0$

THF : $\omega \to +\infty \Rightarrow x \to +\infty \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

$x = 1 \quad (\omega = \omega_0) \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$




Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515



Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515