L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit. Il sera tenu compte, dans la notation des copies, de la précision des raisonnements et de la qualité de la rédaction.

## Exercice. 1

1. Soient $A, B$ *et* $C$ trois parties d'un ensemble $E$.
   a. Que dire de $A$ et $B$ si $A \cup B = A \cap B$ ?
   b. Montrer que $A \cup B = A \cap C \iff A \subset B \subset C$.

2. Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Quelle relation y-a-t-il :
   a. Entre $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ?
   b. Entre $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$ ?

3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Établir les implications suivantes :
   a) $g \circ f$ injective $\Longrightarrow$ $f$ injective.
   b) $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow$ $g$ surjective
   c) $g \circ f$ injective et $f$ surjective $\Longrightarrow$ $g$ injective.
   d) $g \circ f$ surjective et $g$ injective $\Longrightarrow$ $f$ surjective.

4. Soient E un ensemble, $(\mathrm{F}, \leq)$ un ensemble ordonné et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff f(x) \leq f(y)$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur E.

5. Soit E un ensemble. On rappelle que $\mathrm{E}^{\mathrm{E}}$ est l'ensemble des applications de E dans E.
   Si $f$ et $g$ sont deux éléments de $\mathrm{E}^{\mathrm{E}}$, on dira que $f$ est conjuguée à $g$ s'il existe une bijection $\varphi$ de E dans E telle que $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$. On notera alors $f \sim g$.
   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathrm{E}^{\mathrm{E}}$.
   (b) Quelle est la classe d'équivalence de $\mathrm{Id}_E$?.

6. Énoncer correctement les définitions des notions suivantes :
   a. Intervalle de $\mathbb{R}$.
   b. Borne supérieure d'un ensemble de $\mathbb{R}$.
   c. Partie dense dans $\mathbb{R}$.

## Exercice. 2

On pose $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. On rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

On définit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C}\backslash\{-i\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \dfrac{iz+1}{z+i} \end{cases}$

**1.** L'application $f$ est-elle injective ?
**2.** Montrer que $f(\mathbb{C}\backslash\{-i\}) = \mathbb{C}\backslash\{i\}$. L'application $f$ est-elle surjective ?
**3.** Montrer que $f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{D}$.
**4.** Montrer que $f$ induit une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathcal{D}$.
**5.** Déterminer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

## Exercice. 3



Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515

Soient $A$ et $B$ deux parties de l'ensemble $\mathbb{R}$. On considère l'application suivante $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $X \longmapsto (X \cap A) \cup B$.

**1-a)** Calculer $f(\varnothing), f(A), f(B)$ et $f(E)$.

**1-b)** Déterminer l'application $f \circ f$.

**2-** Montrer que la fonction $f$ est croissante au sens de l'inclusion.

**3-** Soit $Y$ une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont deux à deux équivalentes :

i) $Y$ admet un antécédent dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par la fonction $f$

ii) $B \subset Y \subset A \cup B$ ;

iii) $f(Y) = Y$ .

*on pourra montrer : i) $\Rightarrow$ ii), ii) $\Rightarrow$ iii) et iii) $\Rightarrow$ i).*

**4-** Résoudre l'équation $f(X) = A$ (où l'inconnue $X$ est une partie de $\mathbb{R}$ ).

*On sera amené à distinguer des cas, à l'aide de la question précédente.*

**5-** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les parties $A$ et $B$ pour que la fonction $f$ soit constante.

Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515
Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515


Pour toute demande/question, merci de nous contacter sur WTSP au : +212 625-197515